Etwas über die Theorie der cubischen Gleichungen.

Eine kleine Unterſuchung,

womit zur

öffentlichen Prüfung

aller Claſſen

des K. Chriſtianeum

Mittewochs am 23ſten März

Vormittags von 9 und Nachmittags von 3 Uhr an,

und zu den

feyerlichen Abſchiedsreden,

welche

ſechs unſrer geliebten Jünglinge

Freytags am 25ſten März

Vormittags um 11 Uhr

in unſerm gröſsern Hörſaale

halten werden,

gehorſamſt und ergebenſt einladet

Jacob Struve

Dr. der Philoſ. K. Prof. u. des academ. Gymnaſiums Director.

Altona 1825.

Gedruckt in der Hammerich- und Heineking'ſchen Buchdruckerey.

Die *Theorie der cubischen Gleichungen* ist nicht leicht, und dabey fehlt es mehreren Lehrbüchern und Abhandlungen darüber hier und da an *Deutlichkeit* und *Genauigkeit*; ja sogar der sonst so gründliche sel. *Klügel* in seinem herrlichen, aber leider unvollendeten, *Wörterbuche* mögte wol nicht ganz von dem Tadel zu *undeutlicher Kürze* frey gesprochen werden können. Kein Wunder also, wenn uns Lehrern in den Vorbereitungsanstalten für die Academie hier Deutlichkeit und Genauigkeit schwer wird, und noch weniger, wenn uns nicht viele Schüler im Vortrage darüber folgen können und mögen. Das folgende sey daher ein Versuch *die ersten dahin gehörigen Aufgaben und Sätze* deutlich vorzutragen und zu erläutern.

I. *Vorläufige Erläuterung*. Die Theorie der *gemischten quadratischen Gleichungen* zeigt, dass jede derselben 2 Wurzeln hat, und aus dieser

 Theo-

Theorie folgt durch die Multiplication der so genannten Wurzelgleichungen, daſs in jeder solchen reducirten Gleichung in dem Coefficienten des 2ten Gliedes die Summe der beyden Wurzeln, und im dritten Gliede ihr Product, beydes mit umgekehrtem Vorzeichen, enthalten ist. *Beyspiel*: $x^2 - 6x + 8 = 0$ hat die beyden Wurzeln 2 und 4, und bey x ist der Coefficient $-6 = -(2 + 4)$, und im dritten Gliede ist $+ 8 = - 2 . - 4$. *Allgemein:* Die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ hat, wenn $-a = -(p+q)$, und $+ b = - p . - q$ ist, die beyden Ww. p u. q. Eben so ist es bekanntlich mit den übrigen Formen der gemischten quadratischen Gleichungen; $x^2 + ax + b = 0$, in a und b die Vorzeichen mitgedacht, enthält in a immer so die Summe, und in b das Product der beyden Ww. mit umgekehrten Vorzeichen. So entsteht allerdings die *Vermuthung*, aber auch *nur die Vermuthung*, daſs auch jede gemischte cubische Gleichung 3 Ww. so haben werde, daſs in dem Coefficienten ihres 2ten Gliedes die Summe derselben, in dem des 3ten die Summe ihrer Verbindungen zu zweyen, und in ihrem vierten Gliede ihr Product, alles mit umgekehrtem Vorzeichen, seyn werde. *Beyspiel*. Es hat $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ die 3 Ww. 2, 3 und 4, und -9 ist $= -(2 + 3 + 4)$,

$26 = -2 . -3 + (-2 . -4) + (-3 . -4)$, und $-24 = -2 . -3 . -4$. Diese *Vermuthung* bestätigt allerdings die Multiplication der Wurzelgleichungen $(x-2) . (x-3) . (x-4)$; aber diese Multiplication darf *nicht als Beweis der Allgemeinheit* dieser Behauptung, sondern erst aus der allgemeinen Theorie als Bestätigung derselben angesehen werden.

2. *Aufgabe.* Aus der Summe a dreyer bejahten Zahlen p, q und r, ferner aus der Summe b ihrer 3 Producte in ihren 3 Paaren, pq, pr u. qr, verbunden, und aus dem Producte c aller dreyer pqr, die Gleichungen für diese 3 Zahlen p, q u. r zu finden. *Erläuterungsbeyspiel*: Es sollen 2, 3 und 4 gefunden, d. i. in Gleichungen dargestellt werden, aus welchen sie zu finden sind, aus $9 = 2 + 3 + 4$, $26 = 2 . 3 + 2 . 4 + 3 . 4$, und aus $24 = 2 . 3 . 4$.

Allgemeine Auflösung.	Erläuterungsbeyspiel
Gegeben I. $p + q + r = a$	$2 + 3 + 4 = 9 = a$
II. $pq + pr + qr = b$	$2.3 + 2.4 + 3.4 = 26 = b$
und III. $pqr = c$.	$2 . 3 . 4 = 24 = c$.
Man drücke $q + r$ durch α aus, so wird aus I.	$3 + 4 = 7 = \alpha$
$p + \alpha = a$.	$2 + 7 = 9$

dies

dies mit p^2 mult. gibt,	mit 2^2
$p^3 + \alpha p^2 = a p^2$	$2^3 + 7 . 2^2 = 9 . 2^2$
oder	oder
IV. $p^3 - a p^2 + \alpha p^2 = 0$	$2^3 - 9 . 2^2 + 7 . 2^2 = 0$

Jezt werden die beyden ersten Producte in II. $pq + pr$ durch αp und das dritte daselbst qr werde durch β ausgedrückt, so ist II.

$\alpha p + \beta = b$	$7 . 2 + 3 . 4 = 26.$
dies mit p multiplicirt gibt	mit 2
$\alpha p^2 + \beta p = b p$	$7 . 2^2 + 12 . 2 = 26 . 2$
oder $\alpha p^2 = b p - \beta p$	$7 . 2^2 = 26 . 2 - 12 . 2.$

Nun für αp^2 in IV. dies substituirt, gibt, da $\beta p = pqr = c$ ist, die verlangte Gleichung für p

$p^3 - a p^2 + b p - c = 0$	$2^3 - 9 . 2^2 + 26 . 2 - 24 = 0$

3. *Zusatz.* Da für q und r, a und b dieselben Summen, und c dasselbe Product bleiben: so müssen für sie sich eben dieselben Gleichungen ergeben. Für q werde dies hier noch durchgeführt.

I. $q + p + r = a$	$3 + 2 + 4 = 9 = a$
II. $qp + qr + pr = b$	$3.2 + 3.4 + 2.4 = 26 = b$
III. $qpr = c$	$3 . 2 . 4 = 24 = c$
$p + r = \alpha$	$2 + 4 = 6 = \alpha$
$q + \alpha = a$	$3 + 6 = 9$

mit

mit q^2 multiplicirt	mit 3^2
$q^3 + \alpha q^2 = a q^2$ oder	$3^3 + 6 . 3^2 = 9 . 3^2$ oder
IV, $q^3 - a q^2 + \alpha q^2 = o$	$3^3 - 9 . 3^2 + 6 . 3^2 = o$
$p r = \beta$ gibt aus II.	$2 . 4 = 8 = \beta$ gibt
$\alpha q + \beta = b$; daher	$6 . 3 + 8 = 26$; daher
$\alpha q^2 + \beta q = b q$, oder	$6 . 3^2 + 8 . 3 = 26 . 3$
$\alpha q^2 = b q - \beta q$;	$6 . 3^2 = 26 . 3 - 8 . 3$

also aus IV wird

$q^3 - a q^2 + b q - c = o$	$3^3 - 9 . 3^2 + 26 . 3 - 24 = o$

die für q eben so gestaltete Gleichung, als die für p in 2.

4. *Anmerkung.* Hier, und in allem folgenden, wird angenommen, dass keine der Zahlen p, q und r einer der beyden übrigen gleich sey. Der Fall mit 2 gleichen, oder gar mit 3 gleichen Ww. kömmt in dieser Theorie nachher besonders vor. *Beyspiel.* Bey $p = 2$, und $q = r = 3$ ist die Gleichung, indem wir jede der 3 Zahlen durch x ausdrücken.

$x^3 - 8 x^2 + 21 x - 18 = o$, und sie ist

bey $x = 2$, $8 - 32 + 42 - 18 = o$, und

$= 3$, $27 - 72 + 63 - 18 = o$; ferner

die Gleichung $x^3 - 9 x^2 + 27 x - 27 = o$ hat $p = q = r = 3$; und ist, bey $x = 3$, $27 - 81 + 81 - 27 = o$.

5. *Er-*

5. *Erklärung.* Die bisherige allgemeine Form $p^3 - ap + bp - c = o$, oder $q^3 - ap^2$ u. s. w., oder r^3 u. s. w., oder zusammen gefasst $x^3 - ax^2 + bx - c = o$ heisst die *Normalform der gemischten vollständigen cubischen Gleichungen* mit 3 Abwechselungen in ihren Vorzeichen, nemlich mit $+ -$ vor dem ersten und 2ten, mit $- +$ vor dem 2ten und 3ten, und mit $+ -$ vor dem 3ten und 4ten Gliede. Wir bezeichnen sie hier mit A, und sagen:

$$A = x^3 - ax^2 + bx - c = o$$

ist *die Normalform für cubische Gleichungen mit 3 bejahten Ww.*, p, q u. r. Ein *Beyspiel* ist

$$x^3 - 30x^2 + 275x - 750 = o, \text{ mit}$$
$$x = p = 5,\ 125 - 750 + 1375 - 750 = o,$$
$$q = 10,\ 1000 - 3000 + 2750 - 750 = o \text{ und}$$
$$r = 15,\ 3375 - 6750 + 4125 - 750 = o.$$

6. *Zusatz.* Die Entstehung dieser Normalform A aus der Multiplication ihrer 3 Wurzelgleichungen erhellt aus dem bisherigen, unb bestätigt dasselbe zugleich. Es ist $(x - p) . (x - q) . (x - r) = x^2 - ax^2 + bx - c$; und im *Beyspiele* in 5. $(x - 5) . (x - 10) . (x - 15) = (x^2 - 15x + 50) . (x - 15) = x^3 - 30x^2 + 275x - 750$.

7. *Auf-*

7. *Aufgabe.* Wenn Eine Zahl von p, q u. r verneint ist, z. B. p, eben so aus a, b u. c die Gleichung für sie herzuleiten, und zwar *für den ersten Fall* mit p nicht nur $< (q + r)$, so dass $-p + \alpha = a$ bejaht ist, sondern auch $p\alpha < \beta$ mit $-p\alpha + \beta = b$ ebenfalls bejaht.

Allgemeine Auflösung.	Erläuterungsbeyspiel.
I. $-p + q + r = a$	$-2 + 5 + 10 = 13 = a$
d. i. $-p + \alpha = a$	$-2 + 15 = 13$; $\alpha = 15$
II. $-p(q + r) + qr = b$	$-2.(5 + 10) + 50 = b$; $b = 20$
d. i. $-p\alpha + \beta = b$	$-2.15 + 50 = b$; $\beta = 50$
III. $-pqr = -c$	$-2.5.10 = -100$
I. mit p^2 mult.	mit 2^2
gibt $-p^3 + \alpha p^2 = ap^2$	$-2^3 + 15.2^2 = 13.2^2$
od. IV. $-p^3 - ap^2 + \alpha p^2 = 0$	$-2^3 - 13.2^2 + 15.2^2 = 0$

Ferner folgt aus II. mit $-p$ mult.

$\alpha p^2 - c = -bp$	$15.2^2 - 100 = -20.2$
od. $\alpha p^2 = -bp + c$	$15.2^2 = -20.2 + 100$

Daher wird IV.

$-p^3 - ap^2 - bp + c = 0$	$-2^3 - 13.2^2 - 20.2 + 100 = 0$

die verlangte Gleichung.

Man drücke in ihr $-p$ durch x aus: so ist

$$B' = x^3 - ax^2 + bx + c = 0$$

die

die Normalform der cubischen Gleichung mit 2 solchen bejahten, und Einer verneinten Wurzel. Die Gleichung ist nemlich auch für q u. r gültig; dabey hat sie in den Vorzeichen zwey Abwechselungen, $+-$, $-+$, und Eine gleiche Folge, $++$. Obiges *Beyspiel*

$$x^3 - 13x^2 + 20x + 100 = 0,$$

ist nicht nur

bey $x = -2$, $\quad -8 - 52 - 40 + 100 = 0$,

sondern auch bey

$x = +5$, $\quad 125 - 325 + 100 + 100 = 0$, und

$x = +10$, $\quad 1000 - 1300 + 200 + 100 = 0$.

8. Die *Aufgabe* in 7, aber für *den 2ten Fall* mit $-p + \alpha = a$ zwar bejaht, allein mit $-p\alpha + \beta = -b$, und also verneint.

I. $-p+q+r$	$-4+5+10=11=a$
d.i. $-p+\alpha=a$	$-4+15=11;\ \alpha=15$
II. $-\alpha p+\beta=-b$	$-15.4+50=-10;=-b,\ \beta=50$
III. $-pqr=-c$	$-4.5.10=-200=-c$
$-p^3+\alpha p^2=ap^2$	$-4^3+15.4^2=11.4^2$
IV. $-p^3-ap^2+\alpha p^2=0$	$-4^3-11.4^2+15.4^2=0$
$-\alpha p+\beta=-b$	$-15.4+50=-10$
$\alpha p^2-\beta p=bp$	$15.4^2-50.4=10.4$
$\alpha p^2=bp+c$	$15.4^2=40+200$

Also ist in IV.

$-p^3-ap^2+bp+c=0 \quad -4^3-11.4^2+10.4+200=0$

die

die verlangte Gleichung; und alſo, $-p = x$ geſetzt,

$$B''\ x^3 - ax^2 - bx + c = 0$$

die *Normalform* einer cubiſchen Gleichung für 2 ſolche bejahte, und Eine verneinte Wurzel mit zwey Abwechſelungen und Einer gleichen Folge in den Vorzeichen, nemlich mit $+-$, $--$, $-+$.

Beyſpiel: $x^3 - 11x^2 - 10x + 200 = 0$,

iſt nicht nur

bey $x = -4$, $-64 - 176 + 40 + 200 = 0$,

ſondern auch bey

$x = +5$, $125 - 275 - 50 + 200 = 0$,

und $x = +10$, $1000 - 1100 - 100 + 200 = 0$.

9. Die *Aufgabe* in 7. für *den dritten Fall* mit a ſowol als b verneint,

I. $-p + q + r = -a$	$-10 + 2 + 5 = -3 = -a$
d.i. $-p + \alpha = -a$	$-10 + 7 = -3$; $\alpha = 7$
II. $-\alpha p + \beta = -b$	$-7.10 + 10 = -60 = -b$; $\beta = 10$
III. $-pqr = -c$	$-10.2.5 = -100$
$-p^3 + \alpha p^2 = -ap^2$	$-10^3 + 7.10^2 = -3.10^2$
IV. $-p^3 + ap^2 + \alpha p^2 = 0$	$-10^3 + 3.10^2 + 7.10^2 = 0$
$\alpha p^2 - \beta p = bp$	$7.10^2 - 10.10 = 60.10$
$\alpha p^2 = bp + c$	$7.10^2 = 60.10 + 100$

daher

$-p^3 + ap^2 + bp + c = 0$ $\quad -10^3 + 3.10^2 + 60.10 + 100 = 0$,

oder

oder, $-p$ durch x ausgedrückt,

$$B''' = x^3 + ax^2 - bx + c = 0$$

hier *die Normalform*. *Beyspiel*. Es ist nicht nur, bey $x = -10$,

$$x^3 + 3x^2 - 60x + 100 = 0,$$

sondern auch bey $x = 2$,

$$8 + 12 - 120 + 100 = 0,$$ und, bey $x = 5$, $125 + 75 - 300 + 100 = 0$.

10. *Zusatz*. *Ein 4ter Fall* mit $-a$, und doch $+b$ ist nicht möglich. Man bedenke nur: in $-p+q+r$, oder $-p+\alpha = -a$, sey $q = t + w$ und $r = t$: so ist $\alpha = 2t + w$, und $\beta = qr = t^2 + wt$. Nun soll $p > \alpha$ für das $-a$, also $> (2t+w)$ seyn; es sey also $p = 2t + w + z$: so wird die Formel für b

$$-\alpha p + \beta = b$$

$-(2t+w).(2t+w+z) + t^2 + wt = b$; das heisst, b wird verneint.

11. *Zusatz*. So haben wir aus 7—9 die drey Normalformen

$$B' = x^3 - ax^2 + bx + c = 0$$
$$B'' = x^3 - ax^2 - bx + c = 0,$$ und
$$B''' = x^3 + ax^2 - bx + c = 0,$$

welche sich in eine einzige

$$B = x^3 \pm ax^2 \mp bx + c = 0$$

verzerbinden laſſen, als *Normalform* mit 2 Abwechſelungen, und Einer gleichen Folge für 2 bejahte und Eine verneinte Wurzel.

12. *Aufgabe.* Wenn 2 Zahlen von p, q u. r verneint ſind, z. B. q und r, aus a, b und c die Gleichung für ſie herzuleiten und zwar für *den erſten Fall* mit $p > \alpha$, und alſo a bejaht, aber, was immer damit verbunden iſt, $\alpha p > \beta$, und alſo b verneint.

I. $p-q-r = a$	$10-5-3 = 2;\ a = 2$
oder $p-\alpha = a$	$10-8 = 2;\ \alpha = 8$
II. $-\alpha p + \beta = -b$	$-8.10+15 = -65 = -b;\ \beta = 15$
III. $pqr = c$	$10.5.3 = 150$
$p^3 - \alpha p^2 = ap^2$	$10^3 - 8.10^2 = 2.10^2$
IV. $p^3 - ap^2 - \alpha p^2 = 0$	$10^3 - 2.10^2 - 8.10^2 = 0$
$-\alpha p^2 + \beta p = -bp$	$-8.10^2 + 15.10 = -65.10$
$-\alpha p^2 = -bp - c$	$-8.10^2 = -65.10 - 150$

Daher die verlangte Gleichung

$p^3 - ap^2 - bp - c = 0$ $\qquad 10^3 - 2.10^2 - 65.10 - 150 = 0$

Alſo die *Normalform für dieſen Fall* iſt:

$$C' = x^3 - ax^2 - bx - c = 0.$$

Im *Beyſpiele* $x^3 - 2x^2 - 65x - 150 = 0$, iſt nicht nur $x = 10$, ſondern auch bey

$x = -3$, iſt $-27 - 18 + 195 - 150 = 0$, u.

bey $x = -5$, : $-125 - 50 + 325 - 150 = 0$.

Uebri-

Uebrigens *muſs* bey $p > (q+r)$, und alſo $= q+r+t$, *b durchaus verneint werden*, denn

$$-\alpha p + \beta = b \text{ iſt}$$
$$-(q+r) \cdot (q+r+t) + qr = -b.$$

13. Die *Aufgabe* in 12. *für den zweyten Fall* mit $p < \alpha$, und auch $\alpha p > \beta$ alſo mit $-a$ und $+b$.

$$\begin{array}{ll}
p-q-r = -a & 2-3-10 = -11 = -a, \\
\text{d.i. } p-\alpha = -a & 2-13 = -11 \text{ mit } \alpha = 13 \\
-\alpha p + \beta = b & -13 \cdot 2 + 30 = 4 = b;\ \beta = 30 \\
p^3 - \alpha p^2 = -ap^2 & 2^3 - 13 \cdot 2^2 = -11 \cdot 2^2 \\
p^3 + ap^2 - \alpha p^2 = 0 & 2^3 + 11 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2^2 = 0 \\
-\alpha p^2 + \beta p = bp & -13 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \\
-\alpha p^2 = bp - c & -13 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2 - 30 \cdot 2
\end{array}$$

Daher die verlangte Gleichung

$$p^3 + ap^2 + bp - c = 0 \quad 2^3 + 11 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 60 = 0$$

Alſo die *Normalform* für dieſen Fall iſt

$$C'' = x^3 + ax^2 + bx - c = 0$$

Im *Beyſpiele* $x^3 + 11x^2 + 4x - 60 = 0$ iſt nicht nur $x = 2$, ſondern

$x = -3$ gibt auch $-27 + 99 - 12 - 60 = 0$, und

$x = 10$; ; $-1000 + 1100 - 40 - 60 = 0$.

14. Die *Aufgabe* in 12 *für den dritten Fall* mit $p < \alpha$, und $\alpha p > \beta$; alſo mit a und b beyden verneint.

$$
\begin{array}{ll}
p-q-r=-a & 6-3-5=-2=-a \\
\text{d.i. } p-\alpha=-a & 6-8=-2;\ \alpha=8 \\
-\alpha p+\beta=-b & -8\cdot6+15=-33=-b;\ \beta=15 \\
p^3-\alpha p^2=-\alpha p^2 & 6^3-8\cdot6^2=-2\cdot6^2 \\
p^3+ap^2-\alpha p^2=0 & 6^3+2\cdot6^2-8\cdot6^2=0 \\
-\alpha p^2+\beta p=-bp & -8\cdot6^2+15\cdot6=-33\cdot6 \\
-\alpha p^2=-bp-c & -8\cdot6^2=-33\cdot6-15\cdot6
\end{array}
$$

Daher die verlangte Gleichung

$$
\begin{array}{ll}
p^3+ap^2-bp-c=0 & 6^3+2\cdot6^2-33\cdot6-90=0
\end{array}
$$

Alſo die *Normalgleichung* in dieſem Falle iſt

$$C'''=x^3+ax^2-bx-c=0$$

Im *Beyſpiel* $x^3+2x^2-33x-90=0$

iſt auſser $x=6$ auch $x=-3$, mit

$$-27+18+99-90=0, \text{ und}$$

mit $x=-5$, $-125+50+165-90=0$.

15. *Zuſatz.* Wir haben aus 12 – 14 die 3 Normalformen

$$C'=x^3-ax^2-bx-c=0$$

$$C''=x^3+ax^2+bx-c=0$$

$$\text{u. } C'''=x^3+ax^2-bx-c=0$$

welche ſich in eine einzige

$$C=x^3\mp ax^2\mp bx-c=0$$

verbinden laſſen, als *Normalgleichung* mit Einer Abwechſelung und 2 gleichen Folgen für Eine bejahte und zwey verneinte Wurzeln.

16. *An-*

16. *Anmerkung.* In 7–9 u. 12–14 braucht der Fall, daſs von p, q und r das bejahte dem verneinten gleich ſey, und alſo das zweyte Glied der Gleichung wegfalle, nicht beſonders behandelt zu werden, weil a auch = o ſeyn kann. Ein *Beyſpiel* einer ſolchen Gleichung iſt:

$$x^3 - 76x - 240 = 0, \text{ bey}$$
$$x = 10,\ 1000 - 760 - 240 = 0,$$
$$x = -4,\ -64 + 304 - 240 = 0, \text{ und}$$
$$x = -6, -216 + 456 - 240 = 0.$$

17. Endlich die *Aufgabe* in 7. aufzulöſen, wenn alle 3 Zahlen p, q u. r verneint ſind.

$-p-q-r=-a$	$-2-3-4=-9=-a$
oder $-p-\alpha=-a$	$-2-7=-9$; mit $\alpha=7$
$-p^3-\alpha p^2=-ap^2$	$-2^3-7.2^2=-9.2^2$
alſo $-p^3+ap^2-\alpha p^2=0$	$-2^3+9.2^2-7.2^2=0$
$\alpha p+\beta=b$	$7.2+12=26=b;\beta=12$
$-\alpha p^2-\beta p=-bp$	$-7.2^2-12.2=-26.2$
od. $-\alpha p^2=-bp+c$	$-7.2^2=-26.2+24$

daher die Gleichung

$$-p^3+ap^2-bp+c=0 \qquad -2^3+9.2^2-26.2+24=0$$

Indem $-p$ darin durch x ausgedrückt wird, entſteht die *Normalgleichung*

$$D = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit 3 gleichen Folgen für 3 verneinte Ww. Im

Bey-

Beyspiele $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0$ ist, wie bey $x = -2$, auch bey $x = -3$,

$$-27 + 81 - 78 + 24 = 0$$

und $x = -4$, $-64 + 144 - 104 + 24 = 0$.

18. *Zusatz.* Die vollständige cubische Gleichung kann nur 8 verschiedene Formen haben, und diese sind alle 8 in den Normalformen enthalten, nemlich eine in A, drey in B, drey in C, und eine in D. Man findet

1.	$x^3 + ax^2$	$+ bx + c = 0$	in D	im	17^{ten}	Satze
2.	„ „	$+ bx - c = 0$	„	C,C″	„ 13	„
3.	„ „	$- bx + c$ „	„ in	B,B‴	„ 9	„
4.	„ „	$- bx - c$ „	„ „	C,C‴	„ 14	„
5.	$x^3 - ax^2$	$+ bx + c$ „	„ „	B,B′	„ 7	„
6.	„ „	$+ bx - c$ „	„ „	A	„ 5	„
7.	„ „	$- bx + c$ „	„ „	B,B″	„ 8	„
8.	„ „	$- cx - c$ „	„ „	C,C′	„ 12	„

Man fasst diese 4 oder 8 Formen, wie man will, in eine einzige zusammen, und sagt

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

indem in a, b und c die Vorzeichen mit gedacht werden, ist die *allgemeine Normalgleichung für gemischte cubische Gleichungen*

19. *Erstes Resultat.* Andere Ww. als p, q u. r, die Vorzeichen mit darin gedacht, oder auch

 meh-

mehrere kann keine gemischte cubische Gleichung haben, denn für a, b und c ergeben sich nur drey Gleichungen, $p+q+r=a$, $pq+pr+qr=b$, und $pqr=c$, welche also nur diese drey Ww. bestimmen.

20. *Zweytes Resultat.* Von diesen 3 Wurzeln sind so viele *bejaht*, als die gegebene Gleichung *Abwechselungen*, und so viele *verneint*, als sie *gleiche Folgen* in ihren Vorzeichen hat. Es haben die Normalformen

A $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ 3 bejahte Ww.
B $x^3 \pm ax^2 \mp bx + c = 0$ 2 bej. Ww. u. 1 verneinte
C $x^3 \mp ax^2 \mp bx - c = 0$ 1 „ „ „ 2 „
u. D $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ keine aber 3 „

21. *Drittes Resultat.* Von diesen 3 Ww. p, q u. r, die Vorzeichen mit darin gedacht, ist in a die Summe, in b die Summe ihrer 3 Verbindungen in Paaren, und c ihr Product, alle drey aber mit umgekehrten Vorzeichen, enthalten.

22. *Viertes Resultat.* Auch *jede gemischte cubische Gleichung entsteht aus der Multiplication ihrer Wurzelgleichungen.* Nemlich bey $x = p$, u. q, u. r, die Vorzeichen mit darin gedacht, ist bey

$x-p$

$$\left.\begin{array}{r} x-p=0 \\ x-q=t \\ \text{u.}\, x-r=w \end{array}\right\}$$ durch die Multiplication dieſer 3 Gleichungen rechts Null; und links gibt $x-p$ multiplicirt mit

$$\begin{array}{l} \quad x-q \\ \hline x^2-(p+q)\,x+pq, \text{ und dies mit} \\ \quad x-r \\ \hline x^3-(p+q+r)\,x^2+(pq+pr+qr)\,x-pqr. \end{array}$$

Es blieben Oftern 1824 zwar 26 Selectaner bey uns zurück; aber 4 verliefsen uns noch gleich nach der damaligen Feyerlichkeit. Zu den fo nachbleibenden 22 wurden 8 neue aufgenommen, und 30 war die Frequenz in Selecta im Sommerhalbenjahre. Von diefen 30 nahmen Michaelis folgende 4 mit feyerlichen Reden von uns Abfchied:

Carften Friederich Gottfchalk

aus Beyenfleth,

über den Satz: *lerne dich felbft kennen*, in deutfcher Sprache;

Carl Georg Prahm

aus Colmar,

über *den Nutzen vernünftiger Aufklärung*, in lateinifcher;

Peter Diederich Wilhelm Quift

aus Altona,

über *Cato's und Socrates Gröfse* in deutfcher; und

Carl

Carl Gustav Franz Simonis

aus Altona,

über den Satz: *der Mensch ist desto glücklicher, je wenigere unnöthige Bedürfnisse er hat*, in lateinischer Sprache.

So blieben 26, zu welchen 6 neue aufgenommen wurden; also 32 war die Frequenz in Selecta im Winterhalbenjahre.

Jezt werden 23 Jünglinge bey uns bleiben, und 9 von uns Abschied nehmen. Nemlich *Freytags, den 25sten März, von 11 Uhr an*, werden folgende 6 kurze feyerliche Reden halten:

Johann Christoph Georg Schaar

aus Altona,

über den Einfluss der Poesie auf das menschliche Herz in deutschen gereimten Jamben;

Sievert Jacobs

aus Seeth im Schleswigschen

über *den Einfluss der punischen Kriege auf den Zustand der Römer* in lateinischer Sprache;

Heinrich Elie Quist

aus Altona,

über *die Macht der Gewohnheit in deutscher;*

Ernst

Ernst Ludwig Johann Anton Feldhausen

über *die Unsterblichkeit*, ebenfalls in deutscher Sprache;

Johann Herrmann Carl Kähler

aus Itzehoe,

über *den Nutzen der Geschichte*, in lateinischer Sprache, und

Hans Heinrich Ehlers

aus Preetz,

über *die herrlichen Wirkungen des Gebets*, in deutscher Sprache.

Aus häuslichen Gründen werden noch folgende 3 Jünglinge ohne öffentliche Reden von uns Abschied nehmen:

Ulrich Martin Ludwig Lauermeyer

aus Altona;

Anton Friederich Aemil Reibisch

aus Segeberg, und

Ernst Jacob Witt Hansen

aus Wöhrden.

Wir laden *zu dieſer Feyerlichkeit*, ſo wie zu der des *öffentlichen Examens Mittewochs vorher*, Se. Excellenz *unſern verehrungswürdigen* Herrn *Protogymnaſiarchen*, die *übrigen Mitglieder des hochanſehnlichen Gymnaſiarchalcollegii*, das *ehrwürdige Miniſterium*, den *hochlöblichen Magiſtrat*, die hieſigen *bürgerlichen Collegia*, *Civilbediente* und *Militairauctoritäten*, *Gönner*, *Freunde*, *Eltern* und *Angehörige* der Jugend, und überhaupt jeden braven *Bürger*, und jede ſchätzenswerthe *Bürgerinn*, ehrerbietig und ergebenſt ein.

Oeffentlich angeſchlagen den 20ſten März 1825.