Zu der

öffentlichen Prüfung

aller Klassen

des

Königlichen Christianeums

und zur

Anhörung der Abschiedsreden

zweier zur Universität übergehenden Primaner

ladet geziemend ein

Dr. *J. H. C. Eggers*,

Professor und Direktor, Ritter vom Dannebrog und Dannebrogsmann.

Voran eine Abhandlung des vierten Lehrers Dr. *Brandis* über die Auflösung der numerischen Gleichungen.

BIBLIOTHECA CHRISTIANEI ALTONENSIS

Altona.

Druck von Hammerich und Lesser.

1845.

Zu der

öffentlichen Prüfung

aller Klassen

des

Königlichen Christianeums

und zur

Anhörung der Abschiedsreden

zweier zur Universität übergehenden Primaner

ladet geziemend ein

Dr. *J. H. C. Eggers*,

Professor und Direktor, Ritter vom Dannebrog und Dannebrogsmann.

Voran eine Abhandlung des vierten Lehrers Dr. *Brandis* über die Auflösung der numerischen Gleichungen.

BIBLIOTHECA CHRISTIANEI ALTONENSIS

Altona.

Druck von Hammerich und Lesser.

1845.

Zu der

öffentlichen Prüfung

aller Klassen

der

Königlichen Gymnasiums

und zur

Anhörung der Abschiedsreden

zweier zur Universität übergehenden Primaner

ladet gehorsamst ein

Dr. J. H. C. Kayser,

Professor und Direktor, Ritter vom Danebrog und Dannebrogsmand.

Voran eine Abhandlung des vierten Lehrers Dr. Brandis über die Auflösung der numerischen Gleichungen.

Altona.

Druck von Hammerich und Lesser.

1855.

BIBLIOTHECA CHRISTIANEI ALTONENSIS

Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen.

Schon im vorigen Jahrhundert, als sich noch die ersten Analytiker, ein *Euler* und *Lagrange*, mit der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen beschäftigten, nahm die andere Aufgabe, nämlich eine näherungsweise Berechnungsart der Wurzeln einer numerischen Gleichung zu finden, die Aufmerksamkeit der Mathematiker in Anspruch. Die Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades liess vermuthen, dass, wenn man auch eine allgemeine Methode, Gleichungen jedes beliebigen Grades aufzulösen, gefunden habe, dieselbe zur wirklichen Berechnung der Wurzeln einer numerischen Gleichung so gut wie unanwendbar sein würde. Sind ja doch die Formeln, vermittelst welcher man die Wurzeln einer cubischen oder biquadratischen Gleichung aus den Coefficienten derselben bestimmt, so beschaffen, dass sie entweder gar nicht angewandt werden können, was in den sogenannten irreducibeln Fällen stattfindet, oder doch zu beschwerlichen Rechnungen führen. Seitdem nun aber *Abel* die Unmöglichkeit einer allgemeinen Auflösung der Gleichungen strenge nachgewiesen hat, ist das Bedürfniss einer Methode, die Wurzeln einer numerischen Gleichung annähernd zu bestimmen, noch mehr hervorgetreten und hat zu den vielfachen Bemühungen der Mathematiker in den letzten Jahrzehenden, die bezeichnete Aufgabe vollständig zu lösen, Anlass gegeben.

Lagrange *) fasste dieselbe zuerst in ihrer Allgemeinheit auf, und während man sich früher darauf beschränkt hatte, nur die reellen Wurzeln zu bestimmen,

*) Resolution des équations numériques im Anfang sagt er: Etant donnée une équation numérique sans aucune notion de la grandeur ni de la nature de ses racines, en trouver les valeurs numériques exactes s'il est possible, ou aussi approchées qu'on voudra.

zog er auch die imaginären Wurzeln mit in Betracht und war der Erste, welcher eine vollständige Methode, alle Wurzeln einer numerischen algebraischen Gleichung zu berechnen, gab. Zu dem Behufe wandte er eine Hülfsgleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen von je zwei der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, die sogenannte Gleichung der Differenzen, an, welche man immer aus der vorgelegten Gleichung zu berechnen im Stande ist, wenn diese zu den algebraischen gehört. Es führt aber die Bildung derselben zu weitläufigen Rechnungen, sobald der Grad der ursprünglichen Gleichung nur einigermassen beträchtlich ist, indem die Gleichung der Differenzen vom $\frac{n(n-1)}{2}$ten Grade wird, wenn n den Grad der aufzulösenden Gleichung bezeichnet. *) Zur Bestimmung der reellen Wurzeln hat man nun freilich nicht nöthig die Gleichung der Differenzen vollständig zu berechnen, indem man hierzu nur die untere Grenze ihrer positiven Wurzeln zu kennen braucht, welche, wie *Lagrange* **) und *Cauchy* ***) gezeigt haben, auch berechnet werden kann, ohne die Gleichung vollständig zu bilden. Dieses ist aber erforderlich, wenn man die imaginären Wurzeln sucht, da aus den negativen Wurzeln der Gleichung der Differenzen die imaginären Theile derselben gefunden werden. Ist also auch die Methode von *Lagrange* immer anwendbar, und führt dieselbe auch stets zum Ziele, so konnte man sich dennoch in der Praxis nicht mit ihr begnügen, da sie meistentheils langwierige Rechnungen erfordert. Ausserdem lässt sie die Berechnung der Wurzeln transcendenter Gleichungen, welche zur Lösung mancher Probleme in der angewandten Mathematik erforderlich ist, ganz unberücksichtigt. Beiden Uebelständen haben spätere Mathematiker durch andere Auflösungen zu begegnen gesucht; wie weit es ihnen gelungen ist, soll im Folgenden nachgewiesen werden.

Betrachtet man sämmtliche Methoden, welche seit *Lagrange* zur approximativen Berechnung der Wurzeln einer numerischen Gleichung aufgestellt sind, mit Rücksicht auf das Prinzip, welches bei ihnen zur Anwendung gebracht ist,

---

*) Den Rechnungsaufwand bei der Bildung der Gleichung der Differenzen hat *Gräffe*, die Auflösung der höhern numerischen Gleichungen, Zürich 1837, Seite 6 ff., vollständig nachgewiesen.

**) Resol. des équat. num. note 4.

***) Analyse algebr. note 3.

so unterscheidet man leicht ein zwiefaches. Einmal suchte man zuerst die Wurzeln zu trennen, d. h. Grenzen für jede derselben anzugeben, zwischen welchen nur sie allein enthalten ist, und dann vermittelst einer Näherungsmethode ihre Werthe mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit zu bestimmen, oder man wandte zur Berechnung der Wurzeln solche symmetrische Functionen derselben an, die sehr hohe Potenzen der Wurzeln enthalten, so dass die folgenden Glieder dieser symmetrischen Functionen gegen das erste, in welchem die grössten Wurzeln vorkommen, verschwinden, wodurch man zu einfacheren Gleichungen zwischen den Wurzeln gelangt und diese aus denselben der Reihe nach bestimmt.

Das erste Prinzip findet schon in der *Lagrange*'schen Methode bei Berechnung der reellen Wurzeln Anwendung; indem man für x in den ersten Theil der Gleichung $f(x) = 0$ solche Werthe substituirt, die in einer arithmetischen Progression fortschreiten, und deren Differenz gleich oder kleiner als die kleinste Differenz je zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung ist, erhält man für jede reelle Wurzel zwei Grenzen, zwischen denen sie allein liegt, und diese Grenzen lassen sich daran erkennen, dass für dieselben $f(x)$ Werthe mit entgegengesetztem Vorzeichen erhält. Man muss aber meistentheils viele Substitutionen vornehmen, die keine Grenzen einer Wurzel ergeben, was namentlich dann stattfindet, wenn zwei oder mehrere Wurzeln um ein Geringes von einander verschieden sind, und andere dagegen von diesen weit entfernt liegen. Um nun diese nichts zur Berechnung der Wurzeln beitragenden, daher überflüssigen Substitutionen zu vermeiden, ist es nöthig ein Kennzeichen zu besitzen, mittelst dessen man bestimmen kann, wie viele reelle Wurzeln zwischen gegebenen Grenzen liegen. Es giebt zwei Theoreme, mit Hülfe welcher man anzugeben im Stande ist, eines Theils, wie viele reelle Wurzeln zwischen gegebenen Grenzen höchstens enthalten sind, andern Theils, wie viele wirklich zwischen den Grenzen liegen. Beide Theoreme sind in ihrer Allgemeinheit zuerst von *Dirksen* *) aufgestellt worden und erfordern die Auffindung gewisser Hülfsfunctionen, welche bestimmten

*) *Dirksen* über die Trennung der reellen Wurzeln reeller numerischer Gleichungen mit Einer Unbekannten. Berlin, 1837. Im Obigen sind die Theoreme in einer etwas veränderten Form gegeben; hierdurch ist, wie ich glaube, eine Abkürzung in den Beweisen bewirkt.

Bedingungen entsprechen müssen, und aus deren Vorzeichen man, wenn in denselben für die veränderliche Grösse die gegebenen Grenzen gesetzt werden, auf die Anzahl der zwischen diesen Grenzen enthaltenen reellen Wurzeln schliesst.

Das erste Theorem lautet:

Sind a und b zwei reelle Grössen, und zwar $a < b$, ferner $f(x)$, $\underset{1}{f}(x)$, $\underset{2}{f}(x)$, $\underset{3}{f}(x)$ . . . . $\underset{n}{f}(x)$ reelle zwischen den Grenzen a und b continuirliche Functionen der Art, dass:

1. wenn eine derselben, z. B. $\underset{\varrho}{f}(x)$, für einen zwischen a und b liegenden Werth c verschwindet, nnd ω unendlich klein angenommen wird, $\underset{\varrho}{f}(c-\omega)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(c-\omega)$ entgegengesetzte, dagegen $\underset{\varrho}{f}(c+\omega)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(c+\omega)$ gleiche Vorzeichen haben,
2. $\underset{n}{f}(x)$ für keinen Werth zwischen a und b verschwindet, also stets dasselbe Zeichen behält,
3. die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b keine gleiche Wurzeln hat,

und bezeichnet im Allgemeinen $\underset{c}{N}$ die Anzahl der negativen Glieder in der Reihe:

$$f(x) \cdot \underset{1}{f}(x),\ \underset{1}{f}(x) \cdot \underset{2}{f}(x),\ \underset{2}{f}(x) \cdot \underset{3}{f}(x) \ . \ . \ . \ . \ \underset{n-1}{f}(x) \cdot \underset{n}{f}(x),$$

so ist $\underset{a}{N} - \underset{b}{N} = m + 2k$, wo m die Anzahl der zwischen a und b liegenden Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und k irgend eine ganze positive Zahl, die Null mit eingeschlossen, bedeutet.

Zuerst lässt sich leicht darthun, dass die Anzahl der negativen Glieder obiger Reihe, wenn x alle zwischen a und b liegenden Werthe durchläuft, nie zunimmt. Denn die Glieder der angegebenen Reihe können, weil sie continuirliche Functionen sind, nur dann ihr Zeichen ändern, wenn sie verschwinden, oder, was dasselbe ist, wenn eine oder mehrere der bezeichneten Functionen gleich Null werden. Wenn man den Fall ausnimmt, dass $f(x)$ allein verschwindet, so müssen immer wenigstens zwei Glieder und zwar zwei auf einanderfol-

gende auf einmal Null werden; von diesen kann nur das erste vom Positiven zum Negativen übergehen, also bei seinem Durchgang durch Null die Anzahl der negativen Glieder vermehren; das zweite oder die andern, wenn mehrere auf einanderfolgende Glieder verschwinden, gehen vermöge der ersten Bedingung, denen die Functionen unterworfen sind, vom Negativen zum Positiven über und heben jedenfalls den etwa durch das erste verschwindende Glied bewirkten Zuwachs der negativen Glieder auf, so dass nie, wenn mehrere auf einanderfolgende Glieder in obiger Reihe verschwinden, indem x von a bis b wächst, die Anzahl der negativen Glieder zunimmt. Es bleibt nun noch der Fall übrig zu betrachten, wenn $f(x)$ allein verschwindet, dann geht auch nur das erste Glied $f(x) \cdot \underset{1}{f}(x)$ in Null über; da dasselbe aber hernach positiv wird, so kann hierdurch auch die Anzahl der negativen Glieder nicht vermehrt werden. Es folgt also allgemein, dass die Anzahl der negativen Glieder obiger Reihe, wenn x alle zwischen a und b liegenden Werthe durchläuft, nie zunimmt, sondern entweder unverändert bleibt oder abnimmt. Weil aber ferner das Product sämmtlicher Glieder obiger Reihe:

$$f(x) \cdot (\underset{1}{f}[x])^2 \cdot (\underset{2}{f}[x])^2 \cdot (\underset{3}{f}[x])^2 \cdot \ldots \cdot (\underset{n-1}{f}[x])^2 \cdot \underset{n}{f}(x)$$

alle Functionen bis auf die erste und letzte im Quadrate enthält, so bleibt das Vorzeichen desselben stets unverändert, wie viele der mittleren Funktionen auch ihr Zeichen ändern mögen, und eine Aenderung im Vorzeichen desselben tritt nur dann ein, wenn $f(x)$ verschwindet, weil $\underset{n}{f}(x)$ der zweiten Bedingung zufolge stets dasselbe Vorzeichen behält. Hieraus geht hervor, dass die Anzahl der negativen Glieder in den Intervallen zwischen a und b, innerhalb welcher keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt, wenn x beständig wächst, entweder unverändert bleibt oder um eine grade Zahl abnimmt, dagegen, sobald auch $f(x)$ verschwindet, um eine ungrade Anzahl vermindert wird. Man hat demnach, wenn die m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den Grenzen a und b durch $\underset{1}{x}, \underset{2}{x}, \underset{3}{x} \ldots \underset{m}{x}$ bezeichnet werden:

$$N_a - N_{x_1^{-\omega}} = 2z_1$$
$$N_{x_1^{-\omega}} - N_{x_1^{+\omega}} = 2z_2 + 1$$
$$N_{x_1^{+\omega}} - N_{x_2^{-\omega}} = 2z_3$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$N_{x_m^{-\omega}} - N_{x_m^{+\omega}} = 2z_{2m-1} + 1$$
$$N_{x_m^{+\omega}} - N_b = 2z_{2m}$$

wo $z_1, z_2, z_3 \ldots z_{2m}$ irgend welche ganze Zahlen von 0 an bedeuten. Durch die Addition dieses Systems von Gleichungen erhält man:

$$N_a - N_b = m + 2(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2m}),$$

oder, wenn man $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2m}$, welche Summe der eben über $z_1, z_2, z_3 \ldots z_{2m}$ gemachten Annahme zufolge, irgend einer ganzen positiven Zahl, die Null mit eingeschlossen, gleich ist, durch k bezeichnet,

$$N_a - N_b = m + 2k.$$

Den Bedingungen, welchen nach diesem Theoreme die Hülfsfunctionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_n(x)$ unterworfen sind, entsprechen die Differentialquotienten des ersten Theils der Gleichung $f(x) = 0$. Ist diese algebraisch, so gelangt man durch successives Differentiiren zu einem constanten Differentialquotienten, der also sein Zeichen nicht ändert und daher für jedwede Grenzen als letzte Hülfsfunction dienen kann; wenn die Gleichung dagegen zu den transcendenten gehört, so muss man bei einem solchen Differentialquotienten stehen bleiben, der zwischen den gegebenen Grenzen sein Zeichen nicht ändert. *Fourier* *) hat sich zuerst der Differentialquotienten zu diesem Zwecke bedient, und

*) Analyse des équations déterminées. Paris, 1831. Von diesem ausgezeichneten Werke sind leider nur die beiden ersten Bücher vollendet worden; diese betreffen die Auflösung der algebraischen Glei-

gezeigt, dass man aus der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe derselben schliessen kann, wie viele reelle Wurzeln höchstens zwischen gegebenen Grenzen liegen können. Er hat aber nur eine Anwendung davon auf die algebraischen Gleichungen gemacht; es ist jedoch von *Stern* *) die Methode *Fourier*'s nach dessen Andeutungen auch auf die transcendenten Gleichungen ausgedehnt worden.

Während man vermittelst des ersten Theorems nur eine Grenze für die Anzahl der reellen Wurzeln, über welche diese nicht hinausgeht, findet, wird auf analoge Weise durch ein zweites Theorem diese Anzahl selbst bestimmt. Es ist folgendes:

Sind a und b zwei reelle Grössen, und zwar $a < b$, ferner $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ . . . $f_n(x)$ reelle zwischen den Grenzen a und b continuirliche Functionen der Art, dass:

1. wenn eine derselben, z. B. $f(x)$, für einen zwischen a und b liegenden Werth c verschwindet, und ω unendlich klein angenommen wird, sowohl $f(c-\omega)$ und $f_{c-1}(c-\omega)$, als auch $f(c+\omega)$ und $f_{c+1}(c+\omega)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben,
2. wenn $f(x)$ für einen zwischen a und b liegenden Werth c verschwindet, $f(c-\omega)$ und $f_1(c-\omega)$ entgegengesetzte, dagegen $f(c+\omega)$ und $f_1(c+\omega)$ gleiche Vorzeichen haben,
3. $f_n(x)$ für alle Werthe von x zwischen a und b das Zeichen nicht ändert,
4. die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den Grenzen a und b keine gleiche Wurzeln hat,

---

chungen; über den Inhalt der folgenden fünf Bücher hat Fourier nur Andeutungen gegeben in dem Exposé synoptique, welcher sich zu Anfang des Werkes befindet. Das fünfte Buch sollte von den transcendenten Gleichungen handeln. Den Zeichenwechseln bei Fourier entsprechen im Obigen die negativen Glieder; denn zwei Grössen, deren Zeichen einen Wechsel bilden, haben ein negatives Product.

*) Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen in Crelle Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 22.

und bezeichnet im Allgemeinen $\underset{c}{N}$ die Anzahl der negativen Glieder der Reihe:

$$f(x) \,.\, \underset{1}{f}(x),\ \underset{1}{f}(x) \,.\, \underset{2}{f}(x),\ \underset{2}{f}(x) \,.\, \underset{3}{f}(x) \,.\,.\,.\,.\, \underset{n-1}{f}(x) \,.\, \underset{n}{f}(x),$$

so ist $\underset{a}{N} - \underset{b}{N} = m$, wo m die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ bedeutet.

Der Beweis ist dem des ersten Theorems ähnlich. Es können hier ebenfalls die Glieder der angegebenen Reihe nur dann ihr Zeichen ändern, wenn sie verschwinden, oder, was dasselbe ist, wenn eine oder mehrere der Functionen gleich Null werden. Gehen nun eine oder mehrere derselben, die erste $f(x)$ ausgenommen, in Null über, verschwinden also wenigstens zwei auf einander folgende Glieder der Reihe, so bleibt die Anzahl der negativen Glieder unverändert. Denn das Product von je zwei auf einander folgenden Gliedern, z. B. $\underset{\varrho-1}{f}(x) \,.\, \underset{\varrho}{f}(x)$ und $\underset{\varrho}{f}(x) \,.\, \underset{\varrho+1}{f}(x)$, nämlich $\underset{\varrho-1}{f}(x) \,.\, \underset{\varrho}{f}(x)^2 \,.\, \underset{\varrho+1}{f}(x)$, ist, wenn $\underset{\varrho}{f}(c) = 0$, sowohl für $x = c - \omega$, als auch für $x = c + \omega$, negativ, weil für beide Werthe von x der ersten Bedingung zufolge $\underset{\varrho-1}{f}(x)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; also geht das eine Glied vom Positiven zum Negativen über, während das andere positiv wird; und der Zuwachs der Anzahl der negativen Glieder um eins durch die Zeichenänderung des einen Gliedes wird durch die Zeichenänderung des andern aufgehoben. Sobald aber $f(x)$ verschwindet, geht das erste Glied $f(x) \,.\, \underset{1}{f}(x)$ vermöge der zweiten Bedingung vom Negativen zum Positiven über, und in diesem Falle verliert die Reihe ein negatives Glied. Man hat daher, wenn $\underset{1}{x}, \underset{2}{x}, \underset{3}{x} \,.\,.\,.\, \underset{m}{x}$ die zwischen a und b liegenden Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind,

---

diese Abhandlung zerfällt in drei Abtheilungen. Zuerst ist eine Kritik der früheren Methoden zur Auflösung der transcendenten Gleichungen gegeben; dann folgt eine vollständige Ausführung der Fourier'schen Methode und zuletzt sind Anwendungen von derselben auf mehrere Beispiele gemacht.

$$N_a - N_{x-\omega_1} = 0$$
$$N_{x-\omega_1} - N_{x+\omega_1} = 1$$
$$N_{x+\omega_1} - N_{x-\omega_2} = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$N_{x-\omega_m} - N_{x+\omega_m} = 1$$
$$N_{x+\omega_m} - N_b = 0$$

und durch die Addition dieses Systems von Gleichungen erhält man:

$$N_a - N_b = m.$$

Wenn $f(x) = 0$ eine algebraische Gleichung ist, so lassen sich leicht aus $f(x)$ andere Functionen herleiten, welche den Bedingungen des letzten Theorems entsprechen und daher zur Bestimmung der Anzahl der Wurzeln zwischen bestimmten Grenzen als Hülfsfunctionen angewandt werden können. Bildet man nämlich $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ . . . $f_n(x)$ aus $f(x)$ und $f'(x)$ *) durch successive Division so, dass:

$$f(x) = Q_1 f'(x) - f_2(x)$$
$$f'(x) = Q_2 f_2(x) - f_3(x)$$
$$f_2(x) = Q_3 f_3(x) - f_4(x)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$f_{n-2}(x) = Q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x)$$

ist, wo Q_1, Q_2, Q_3 u. s. w. ganze rationale Functionen von x bedeuten, und setzt die Divisionen so weit fort, bis der letzte Rest $f_n(x)$ eine constante Grösse wird,

---

*) $f'(x)$ bedeutet hier nach der Lagrange'schen Bezeichnungsart den ersten Differentialquotienten von $f(x)$.

welcher Fall stets eintreten muss, da die Reste von immer niedrigerem Grade werden, so haben die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $\underset{2}{f}(x)$ . . . $\underset{n}{f}(x)$ die verlangten Eigenschaften. Die Anwendung dieser Functionen zur Berechnung der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zwischen gegebenen Grenzen rührt von *Sturm* *) her. Statt nach den fallenden Potenzen von x die Divisionen anzuordnen, kann man auch umgekehrt dieselben nach den steigenden Potenzen vornehmen und $\underset{2}{f}(x)$, $\underset{3}{f}(x)$ . . . $\underset{n}{f}(x)$ so bestimmen, dass:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \underset{1}{Q}\, f'(x) - x^2 \underset{2}{f}(x) \\
f'(x) &= \underset{2}{Q}\, \underset{2}{f}(x) - x^2 \underset{3}{f}(x) \\
\underset{2}{f}(x) &= \underset{3}{Q}\, \underset{3}{f}(x) - x^2 \underset{4}{f}(x) \\
&\vdots \\
\underset{n-2}{f}(x) &= \underset{n-1}{Q}\, \underset{n-1}{f}(x) - x^2 \underset{n}{f}(x)
\end{aligned}
$$

wird, indem $\underset{1}{Q}$, $\underset{2}{Q}$, $\underset{3}{Q}$ u. s. w. wiederum ganze rationale Functionen von x bezeichnen; in diesem Falle gelangt man auch, sobald $f(x) = 0$ eine algebraische Gleichung ist, endlich zu einem constanten Reste. Die letzte Art, die Hülfsfunctionen zu bestimmen, liesse sich auch auf die transcendenten Gleichungen anwenden, wenn man die erste Seite derselben in eine convergente, nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelte; und man müsste dann mit den Divisionen so weit fortfahren, bis man auf einen Rest käme, der sein Zeichen zwischen den gegebenen Grenzen nicht änderte. Da aber die Coefficienten der spätern Reste meistentheils so verwickelt sein würden, dass es so gut wie unmöglich wäre zu entscheiden, ob einer dieser Reste zwischen den gegebenen Grenzen stets dasselbe Zeichen behielte oder nicht, so ist die Sturm'sche Methode nicht anwendbar auf die transcendenten Gleichungen. Indess für manche transcendente Gleichungen entsprechen die Differentialquotienten auch den Bedingungen des zweiten Theorems; und dann giebt die Anzahl der Zeichenwechsel

---

*) Mémoire sur la resolution des équations numériques. Mém. présent. par div. sav. Tom. VI.

in ihrer Reihe, vorausgesetzt, dass man bei einem solchen Differentialquotienten stehen bleibt, der zwischen den gegebenen Grenzen entweder stets positiv oder negativ ist, nicht allein an, wie viele Wurzeln höchstens zwischen diesen Grenzen vorhanden sein können, sondern wie viele wirklich in diesem Intervalle liegen, z. B. die transcendente Gleichung:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{(\Pi[1])^2} + \frac{x^2}{(\Pi[2])^2} - \frac{x^3}{(\Pi[3])^2} + \frac{x^4}{(\Pi[4])^2} - \ldots = 0 \text{ *)}$$

ist eine solche. Man hat, wenn man n mal der Reihe nach differentiirt:

$$\overset{(n)}{f}(x) = (-1)^n \left[\frac{1}{\Pi(n)} - \frac{x}{\Pi(n+1)\Pi(1)} + \frac{x^2}{\Pi(n+2)\Pi(2)} - \frac{x^3}{\Pi(n+3)\Pi(3)} + \frac{x^4}{\Pi(n+4)\Pi(4)} - \ldots\ldots\right]$$

also $$\overset{(n+1)}{f}(x) = (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{\Pi(n+1)} - \frac{x}{\Pi(n+2)\Pi(1)} + \frac{x^2}{\Pi(n+3)\Pi(2)} - \frac{x^3}{\Pi(n+4)\Pi(3)} + \frac{x^4}{\Pi(n+5)\Pi(4)} - \ldots\right]$$

und $$\overset{(n+2)}{f}(x) = (-1)^{n+2} \left[\frac{1}{\Pi(n+2)} - \frac{x}{\Pi(n+3)\Pi(1)} + \frac{x^2}{\Pi(n+4)\Pi(2)} - \frac{x^3}{\Pi(n+5)\Pi(3)} + \frac{x^4}{\Pi(n+6)\Pi(4)} - \ldots\right]$$

woraus man leicht folgende Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Differentialquotienten herleitet, nämlich:

$$\overset{(n)}{f}(x) + (n+1)\overset{(n+1)}{f}(x) + x\overset{(n+2)}{f}(x) = 0.$$

Aus dieser folgert man nun, dass, wenn $\overset{(n+1)}{f}(x)$ verschwindet, und x positiv ist, $\overset{(n)}{f}(x)$ und $\overset{(n+2)}{f}(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es versteht sich von selbst, dass dasselbe von den transcendenten Gleichungen $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $\overset{(m)}{f}(x) = 0$ u. s. w. gilt; die eine derselben, nämlich:

---

*) $\Pi(n)$ bezeichnet das Product aller natürlichen Zahlen bis n, demnach $\Pi(n) = 1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots n$.

$$-f'(x) = 1 - \frac{x}{\Pi(2)\,\Pi(1)} + \frac{x^2}{\Pi(3)\,\Pi(2)} - \frac{x^3}{\Pi(4)\,\Pi(3)} + \frac{x^4}{\Pi(5)\,\Pi(4)} - \ldots = 0$$

kommt in der Mechanik, in der Theorie der Bewegung eines elastischen Membrans, vor, und ist von *Poisson* *) behandelt.

Nimmt man die Hülfsfunctionen $\underset{1}{f}(x)$, $\underset{2}{f}(x)$, $\underset{3}{f}(x)$ . . . $\underset{n}{f}(x)$ im Uebrigen eben so an, wie im zweiten Theorem und lässt nur die zweite Bedingung, dass nämlich, wenn $f(x)$ für $x = c$ verschwindet, $f(c - \omega)$ und $\underset{1}{f}(c - \omega)$ entgegengesetzte, dagegen $f(c + \omega)$ und $\underset{1}{f}(c + \omega)$ gleiche Vorzeichen haben, weg, so verliert die Reihe:

$$f(x) \cdot \underset{1}{f}(x),\ \underset{1}{f}(x) \cdot \underset{2}{f}(x),\ \underset{2}{f}(x) \cdot \underset{3}{f}(x) \ldots \underset{n-1}{f}(x) \cdot \underset{n}{f}(x)$$

nicht immer ein negatives Glied, wenn $f(x)$ verschwindet, sondern kann auch, weil $f(x) \cdot \underset{1}{f}(x)$ dann eben so gut vom Positiven zum Negativen übergehen kann, als umgekehrt vom Negativen zum Positiven, ein solches mehr erhalten, und zwar wird die Anzahl der negativen Glieder um eins vermehrt werden, wenn $f(x) \cdot \underset{1}{f}(x)$ vom Positiven zum Negativen, dagegen um eins vermindert, wenn $f(x) \cdot \underset{1}{f}(x)$ vom Negativen zum Positiven übergeht. Ausserdem nimmt die Anzahl der negativen Glieder weder ab noch zu. Geht nun $f(x) \cdot \underset{1}{f}(x)$ m mal vom Negativen zum Positiven und m' mal vom Positiven zum Negativen über innerhalb des Intervalles zwischen a und b, so hat man offenbar:

$$\underset{a}{N} - m + m' = \underset{b}{N}, \text{ oder } \underset{a}{N} - \underset{b}{N} = m - m'.$$

Es wird aber, wenn $f(x)$ und daher $f(x) \cdot \underset{1}{f}(x)$ verschwindet, $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ unendlich, sobald man nur die Bedingung hinzufügt, dass $f(x)$ und $\underset{1}{f}(x)$ nicht

---

*) Mém. de l'acad. des sciences, Tom VIII, pag. 506.

gleichzeitig verschwinden dürfen; und zwar findet bei beiden Grössen, $f(x).\underset{1}{f}(x)$ und $\frac{f_1(x)}{f(x)}$, derselbe Uebergang, entweder vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, statt. Daher geht $\frac{f_1(x)}{f(x)}$, indem es unendlich wird, m mal vom Negativen zum Positiven und m' mal vom Positiven zum Negativen zwischen den Grenzen a und b über, und, wenn man die Differenz $m - m'$ den Excess der Function $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ für die Grenzen a und b nennt und denselben durch $E^{a,b}$ ausdrückt, hat man folgenden Lehrsatz:

Sind a und b zwei reelle Grössen, und zwar $a < b$, ferner $f(x)$, $\underset{1}{f}(x)$, $\underset{2}{f}(x)$, $\underset{3}{f}(x)$ . . . $\underset{n}{f}(x)$ reelle zwischen den Grenzen a und b continuirliche Functionen der Art, dass:

1. wenn eine derselben, z. B. $\underset{\varrho}{f}(x)$, für einen zwischen a und b liegenden Werth c verschwindet, $\underset{\varrho-1}{f}(c-\omega)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(c-\omega)$ eben sowohl als $\underset{\varrho-1}{f}(c+\omega)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(c+\omega)$ entgegengesetzte Zeichen haben,
2. $\underset{n}{f}(x)$ für alle Werthe zwischen a und b dasselbe Zeichen behält,
3. die beiden Functionen $f(x)$ und $\underset{1}{f}(x)$ für keinen zwischen a und b liegenden Werth gleichzeitig verschwinden,

und bezeichnet im Allgemeinen N die Anzahl der negativen Glieder in der Reihe:

$$f(x).\underset{1}{f}(x),\ \underset{1}{f}(x).\underset{2}{f}(x),\ \underset{2}{f}(x).\underset{3}{f}(x)\ .\ .\ .\ .\ \underset{n-1}{f}(x).\underset{n}{f}(x),$$

so ist:

$$\underset{a}{N} - \underset{b}{N} = E^{a,b}\left(\frac{f_1(x)}{f(x)}\right).$$

Es geht hieraus hervor, dass man den Excess einer gebrochenen algebraischen Function auf eine der von *Sturm* zur Bestimmung der Anzahl der Wurzeln angewandten Methode ähnliche Art berechnen kann, und man ist denselben nicht im Stande anzugeben, wenn $f(x)$ und $f_1(x)$ transcendente Functionen sind.

Nachdem dieses über die Bestimmung des Excesses angeführt ist, kehren wir zu den beiden Methoden, die reellen Wurzeln zu trennen, zurück. Die *Sturm*'sche löst diese Aufgabe ganz direct, indem nur nöthig ist, so lange noch mehrere Wurzeln durch die Grösse $N_a - N_b$ angezeigt werden, die Grenzen enger zusammenzuziehen, bis man $N_a - N_b = 1$ hat. Wendet man dagegen die *Fourier*'sche Methode an, so kann es sich ereignen, dass Wurzeln angezeigt werden, während doch keine innerhalb des gegebenen Intervalls enthalten sind, und dass sich dieses auch nicht zu erkennen giebt, wenn man die Grenzen beliebig zusammenzieht. Wie man in diesem Falle zu verfahren hat, um zu erkennen, ob innerhalb eines solchen Intervalls Wurzeln liegen oder nicht, ist von *Fourier* vollständig angegeben. Das Mittel, welches er anwendet, beruht darauf, dass man eine Näherungsmethode, die etwa innerhalb dieser Grenzen liegenden Wurzeln genauer zu bestimmen, zu Hülfe nimmt; sind keine Wurzeln vorhanden, so gelangt man dann endlich zu Werthen für dieselben, die ausserhalb der gegebenen Grenzen liegen. Während demnach die *Sturm*'sche Methode jedes Mal ohne Weiteres zur Trennung der reellen Wurzeln führt, reicht die *Fourier*'sche nicht immer aus, und man muss dann, wie oben erwähnt ist, durch ein anderes Verfahren sich überzeugen, ob die angezeigten Wurzeln wirklich vorhanden sind, oder nicht. Auf der andern Seite leistet sie aber mehr, als erstere; denn ausserdem, dass sie auch auf die transcendenten Gleichungen anwendbar ist, giebt sie zu gleicher Zeit Aufschluss über die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichungen $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ u. s. w. zwischen denselben Grenzen, was für die Anwendung einer ganzen Klasse von

Näherungsmethoden zur genauern Berechnung der Wurzeln von Wichtigkeit ist. *)

Im Vorhergehenden ist gezeigt, dass man die reellen Wurzeln einer jeden Gleichung, sie mag algebraisch oder transcendent sein, trennen kann; in der neuesten Zeit ist die Wissenschaft auch mit einer Methode, die imaginären Wurzeln zu trennen, bereichert worden, und zwar von *Cauchy*, dem die Mathematik so viele Entdeckungen verdankt. Bevor aber auseinandergesetzt werden kann, worin dieselbe besteht, müssen noch einige Hülfssätze über den Excess vorausgeschickt werden.

---

*) Während nämlich die Functionen des ersten Theorems so beschaffen sind, dass $f(x)$ zu $f_{,}(x)$ in derselben Beziehung steht, wie jede der andern zur vorhergehenden, setzt das zweite Theorem noch eine besondere Bedingung für $f(x)$ und $f_{,}(x)$ fest, der zwei andere auf einanderfolgende Functionen nicht zu entsprechen brauchen. Im ersten Theorem können demnach die Hülfsfunctionen $\underset{\varrho+1}{f}(x)$, $\underset{\varrho+2}{f}(x)$ u. s. w. zur Bestimmung der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\underset{\varrho}{f}(x) = 0$ auf dieselbe Weise angewandt werden, wie die ganze Reihe derselben für $f(x) = 0$. Dasselbe folgt aber nicht allgemein für das zweite Theorem; sollen $\underset{\varrho+1}{f}(x)$, $\underset{\varrho+2}{f}(x)$ u. s. w. hier auch zur Bestimmung der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\underset{\varrho}{f}(x) = 0$ ausreichen, so müssen, wenn $\underset{\varrho}{f}(x)$ für $x = c$ verschwindet, $\underset{\varrho}{f}(c-\omega)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(c-\omega)$ entgegengesetzte, aber $\underset{\varrho}{f}(c+\omega)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(c+\omega)$ gleiche Vorzeichen haben. Dieses findet z. B. statt, wenn die Hülfsfunctionen aus der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ nach der *Sturm*'schen Methode bestimmt und der Art sind, „dass der Grad jeder folgenden um eins niedriger ist, als der der vorhergehenden, die Coefficienten der höchsten Potenzen von x in denselben stets positiv, und die letzten Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.“ Denn für die Reihe der $n-\varrho$ Glieder:

$$\underset{\varrho}{f}(x)\cdot\underset{\varrho+1}{f}(x),\ \underset{\varrho+1}{f}(x)\cdot\underset{\varrho+2}{f}(x),\ \underset{\varrho+2}{f}(x)\cdot\underset{\varrho+3}{f}(x)\ \ldots\ \underset{n-1}{f}(x)\cdot\underset{n}{f}(x)$$

ist in diesem Falle $\underset{0}{N} = n-\varrho$, $\underset{\infty}{N} = 0$, also $E^{0,\infty}\left(\dfrac{\underset{\varrho+1}{f}(x)}{\underset{\varrho}{f}(x)}\right) = \underset{0}{N} - \underset{\infty}{N} = n-\varrho$, d. h. $\dfrac{\underset{\varrho+1}{f}(x)}{\underset{\varrho}{f}(x)}$ geht, wenn $f(x)$ verschwindet, $n-\varrho$ mal mehr vom Negativen zum Positiven über, als umgekehrt vom Positiven zum Negativen. $\underset{\varrho}{f}(x)$ ist aber nur vom $n-\varrho$ ten Grade, kann daher nur $n-\varrho$ mal verschwinden, woraus folgt, dass, wenn $\underset{\varrho}{f}(x)$ für $x = c$ verschwindet, $\underset{\varrho}{f}(c-\omega)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(c-\omega)$ entgegengesetzte, $\underset{\varrho}{f}(c+\omega)$ und $\underset{\varrho+1}{f}(c+\omega)$ gleiche Vorzeichen haben. Ferner werden in diesem Falle, wie sogleich erhellt, sämmtliche Gleichungen $f(x) = 0$, $f_{,}(x) = 0$, $f_{,,}(x) = 0$ u. s. w. lauter reelle positive Wurzeln haben.

Es hat die Gleichung $f(x) . f_{,}(x) = 0$, wie aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen bekannt ist, zwischen den Grenzen a und b entweder gar keine oder eine grade Anzahl Wurzeln, wenn $f(a) . f_{,}(a)$ und $f(b) . f_{,}(b)$ gleiche Vorzeichen haben; es ist aber die Anzahl der Wurzeln ungrade, wenn die Vorzeichen von $f(a) . f_{,}(a)$ und $f(b) . f_{,}(b)$ verschieden sind. Im ersten Falle muss, wenn $f(x) . f_{,}(x)$ zwischen den Grenzen a und b M mal vom Negativen zum Positiven und M' mal vom Positiven zum Negativen übergeht, offenbar $M = M'$ sein; im zweiten Falle dagegen $M = M' + 1$, wenn $f(a) . f_{,}(a)$ negativ und $f(b) . f_{,}(b)$ positiv ist, und $M = M' - 1$, wenn $f(a) . f_{,}(a)$ positiv und $f(b) . f_{,}(b)$ negativ ist.

Setzt man nun voraus, dass $f(x)$ und $f_{,}(x)$ zwischen den Grenzen a und b nie gleichzeitig verschwinden, und wird $f(x)$ m mal, $f_{,}(x)$ $m_{,}$ mal gleich Null, wenn $f(x) . f_{,}(x)$ vom Negativen zum Positiven, dagegen $f(x)$ m' mal und $f_{,}(x)$ $m_{,}'$ mal gleich Null, wenn $f(x) . f_{,}(x)$ vom Positiven zum Negativen übergeht, so hat man: $M = m + m_{,}$ und $M' = m' + m_{,}'$, also:

$$m + m_{,} = m' + m_{,}', \text{ oder } m - m' + m_{,} - m_{,}' = 0,$$

wenn $f(a) . f_{,}(a)$ und $f(b) . f_{,}(b)$ gleiche Vorzeichen haben;

$$m + m_{,} = m' + m_{,}' + 1, \text{ oder } m - m' + m_{,} - m_{,}' = +1,$$

wenn $f(a) . f_{,}(a)$ negativ und $f(b) . f_{,}(b)$ positiv ist;

$$m + m_{,} = m' + m_{,}' - 1, \text{ oder } m - m' + m_{,} - m_{,}' = -1,$$

wenn $f(a) . f_{,}(a)$ positiv und $f(b) . f_{,}(b)$ negativ ist.

Verschwindet $f(x)$, so wird $\frac{f_{,}(x)}{f(x)}$ unendlich, $\frac{f(x)}{f_{,}(x)}$ dagegen, wenn $f_{,}(x)$ verschwindet. In beiden Fällen haben $\frac{f_{,}(x)}{f(x)}$ und $\frac{f(x)}{f_{,}(x)}$ mit $f(x) . f_{,}(x)$ dieselbe Zeichenänderung. Hiernach bezeichnen also m und $m_{,}$ respective, wie oft $\frac{f_{,}(x)}{f(x)}$ und $\frac{f(x)}{f_{,}(x)}$, wenn sie unendlich werden zwischen den Grenzen a und b, vom Negativen zum Positiven übergehen, ebenso m' und $m_{,}'$ respective die Anzahl der Uebergänge der Functionen $\frac{f_{,}(x)}{f(x)}$ und $\frac{f(x)}{f_{,}(x)}$ vom Positiven zum Negativen zwi-

schen den Grenzen a und b, wenn sie unendlich werden; also $E^{a,b}\left(\frac{f_{,}(x)}{f(x)}\right) = m - m'$ und $E^{a,b}\left(\frac{f(x)}{f_{,}(x)}\right) = m_{,} - m_{,}'$. Drückt man nun den Excess der reciproken Function durch das umgekehrte Zeichen $\mathcal{I}$ aus, also $E\left(\frac{f(x)}{f_{,}(x)}\right) = \mathcal{I}\left(\frac{f_{,}(x)}{f(x)}\right)$, so findet man vermittelst der obigen Gleichungen folgenden ersten Hülfssatz:

Wenn $E^{a,b}$ den Excess der Function $\frac{f_{,}(x)}{f(x)}$ für die Grenzen a und b, und $\mathcal{I}^{a,b}$ dasselbe für die reciproke Function bezeichnet, so hat man:

$$E^{a,b} + \mathcal{I}^{a,b} = 0, \text{ oder } E^{a,b} + \mathcal{I}^{a,b} = +1, \text{ oder } E^{a,b} + \mathcal{I}^{a,b} = -1,$$

je nachdem $\frac{f_{,}(a)}{f(a)}$ und $\frac{f_{,}(b)}{f(b)}$ gleiche Vorzeichen haben oder ersteres negativ, letzteres positiv, oder ersteres positiv, letzteres negativ ist.

Man kann die oben gegebene Erklärung des Excesses auch auf Functionen mit zwei Veränderlichen anwenden; nur muss dann die eine derselben allein als veränderlich betrachtet und der andern ein bestimmter Werth beigelegt werden. Hiernach ist klar, was man z. B. unter dem Excess der Function $\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$ für $y = y_0$ und zwischen den Grenzen $x = x_0$ und $x = x_{,}$ zu verstehen hat, er ist gleich $E^{x_0, x_{,}}\left(\frac{\varphi(x,y_0)}{\psi(x,y_0)}\right)$.

Analog den früheren Bezeichnungen soll im Folgenden ein solcher Excess durch E oder $\mathcal{I}$ ausgedrückt werden, je nachdem er zur gegebenen Function selbst oder zu deren reciprokem Werthe gehört. Zeiger oben und unten rechts sollen angeben, sowohl die Grenzen, zwischen denen der Excess zu nehmen, als auch die Grösse, welche für die eine Veränderliche zu setzen ist; und zwar sind die oberen Zeiger auf y, die unteren auf x zu beziehen. Z. B. $E^{y_{,}}_{x_0, x_{,}}$ ist der Excess der gegebenen Function für $y = y_{,}$, und zwischen den Grenzen $x = x_0$

und $x = x_{,}$. Der Kürze halber wollen wir die Function, deren Excess ausgedrückt werden soll, in Klammern hinzuzufügen unterlassen, und es ist im Folgenden jeder Excess, bei dem nicht die Function ausdrücklich bezeichnet ist, auf $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$ zu beziehen.

Nach dem ersten Hülfssatze hat man:

$$1.\quad E_{x_{,}}^{y_0, y_{,}} + \mathcal{J}_{x_{,}}^{y_0, y_{,}} = 0, \text{ wenn } \frac{\varphi(x_{,}, y_0)}{\psi(x_{,}, y_0)} \text{ und } \frac{\varphi(x_{,}, y_{,})}{\psi(x_{,}, y_{,})}$$

beide positiv oder negativ sind, oder

$$2.\quad E_{x_{,}}^{y_0, y_{,}} + \mathcal{J}_{x_{,}}^{y_0, y_{,}} = +1, \text{ wenn } \frac{\varphi(x_{,}, y_0)}{\psi(x_{,}, y_0)} \text{ negativ und } \frac{\varphi(x_{,}, y_{,})}{\psi(x_{,}, y_{,})}$$

positiv ist, oder

$$3.\quad E_{x_{,}}^{y_0, y_{,}} + \mathcal{J}_{x_{,}}^{y_0, y_{,}} = -1, \text{ wenn } \frac{\varphi(x_{,}, y_0)}{\psi(x_{,}, y_0)} \text{ positiv und } \frac{\varphi(x_{,}, y_{,})}{\psi(x_{,}, y_{,})}$$

negativ ist. Eben so:

$$4.\quad E_{x_0, x_{,}}^{y_{,}} + \mathcal{J}_{x_0, x_{,}}^{y_{,}} = 0, \text{ wenn } \frac{\varphi(x_0, y_{,})}{\psi(x_0, y_{,})} \text{ und } \frac{\varphi(x_{,}, y_{,})}{\psi(x_{,}, y_{,})}$$

beide positiv oder negativ sind, oder

$$5.\quad E_{x_0, x_{,}}^{y_{,}} + \mathcal{J}_{x_0, x_{,}}^{y_{,}} = +1, \text{ wenn } \frac{\varphi(x_0, y_{,})}{\psi(x_0, y_{,})} \text{ negativ und } \frac{\varphi(x_{,}, y_{,})}{\psi(x_{,}, y_{,})}$$

positiv ist, oder

$$6.\quad E_{x_0, x_{,}}^{y_{,}} + \mathcal{J}_{x_0, x_{,}}^{y_{,}} = -1, \text{ wenn } \frac{\varphi(x_0, y_{,})}{\psi(x_0, y_{,})} \text{ positiv und } \frac{\varphi(x_{,}, y_{,})}{\psi(x_{,}, y_{,})}$$

negativ ist.

Es kann nun offenbar nicht jede der drei ersten Gleichungen mit jeder der drei letzten gleichzeitig stattfinden. Die Gleichungen 2. und 6., eben so 3. und 5. erfordern verschiedene Vorzeichen für $\frac{\varphi(x_{,}, y_{,})}{\varphi(x_{,}, y_{,})}$; daher ist ihre Zusammenstellung unmöglich. Durch Subtraction aber von Gleichung 1. und 4., oder 2. und 5., oder 3. und 6. erhält man:

$$(1)\quad (E_{x_{,}}^{y_0, y_{,}} - E_{x_0, x_{,}}^{y_{,}}) + (\mathcal{J}_{x_{,}}^{y_0, y_{,}} - \mathcal{J}_{x_0, x_{,}}^{y_{,}}) = 0, \text{ wenn } \frac{\varphi(x_{,}, y_0)}{\psi(x_{,}, y_0)} \text{ und } \frac{\varphi(x_0, y_{,})}{\psi(x_0, y_{,})}$$

beide positiv oder negativ sind. — Wenn Gleichung 1. und 5., oder 3. und 4. von einander abgezogen werden:

$$(2)\ \left(E^{y_0, y_,}_{x_,} - E^{y_,}_{x_0, x_,}\right) + \left(\mathcal{E}^{y_0, y_,}_{x_,} - \mathcal{E}^{y_,}_{x_0, x_,}\right) = -1, \text{ wenn } \frac{\Phi(x_, y_0)}{\psi(x_0, y_,)} \text{ positiv und } \frac{\Phi(x_0, y_,)}{\psi(x_0, y_,)} \text{ negativ ist.}$$

Durch analoge Combination von Gl. 1. und 6., oder 3. und 4.:

$$(3)\ \left(E^{y_0, y_,}_{x_,} - E^{y_,}_{x_0, x_,}\right) + \left(\mathcal{E}^{y_0, y_,}_{x_,} - \mathcal{E}^{y_,}_{x_0, x_,}\right) = +1, \text{ wenn } \frac{\Phi(x_, y_0)}{\psi(x_, y_0)} \text{ negativ und } \frac{\Phi(x_0, y_,)}{\psi(x_0, y_,)} \text{ positiv ist.}$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich:

$$(4)\ \left(E^{y_0, y_,}_{x_0} - E^{y_0}_{x_0, x_,}\right) + \left(\mathcal{E}^{y_0, y_,}_{x_0} - \mathcal{E}^{y_0}_{x_0, x_,}\right) = 0, \text{ wenn } \frac{\Phi(x_, y_0)}{\psi(x_, y_0)} \text{ und } \frac{\Phi(x_0, y_,)}{\psi(x_0, y_,)}$$

beide positiv oder negativ sind.

$$(5)\ \left(E^{y_0, y_,}_{x_0} - E^{y_0}_{x_0, x_,}\right) + \left(\mathcal{E}^{y_0, y_,}_{x_0} - \mathcal{E}^{y_0}_{x_0, x_,}\right) = -1, \text{ wenn } \frac{\Phi(x_, y_0)}{\psi(x_, y_0)} \text{ positiv und } \frac{\Phi(x_0, y_,)}{\psi(x_0, y_,)} \text{ negativ ist.}$$

$$(1)\ \left(E^{y_0, y_,}_{x_0} - E^{y_0}_{x_0, x_,}\right) + \left(\mathcal{E}^{y_0, y_,}_{x_0} - \mathcal{E}^{y_0}_{x_0, x_,}\right) = +1, \text{ wenn } \frac{\Phi(x_, y_0)}{\psi(x_, y_0)} \text{ negativ und } \frac{\Phi(x_0, y_,)}{\psi(x_0, y_,)} \text{ positiv ist.}$$

Da, wie ersichtlich ist, nur die Gleichungen (1) und (4), oder (2) und (5), oder (3) und (6) zu gleicher Zeit gelten können, so erhält man durch Subtraction derselben:

$$\left(E^{y_0, y_,}_{x_,} - E^{y_,}_{x_0, x_,} - E^{y_0, y_,}_{x_0} + E^{y_0}_{x_0, x_,}\right) + \left(\mathcal{E}^{y_0, y_,}_{x_,} - \mathcal{E}^{y_,}_{x_0, x_,} - \mathcal{E}^{y_0, y_,}_{x_0} + \mathcal{E}^{y_0}_{x_0, x_,}\right) = 0,$$

oder, wenn man der Kürze halber die Grösse innerhalb der ersten Klammern durch $D^{y_0, y_,}_{x_0, x_,}$ und dem analog die Grösse innerhalb der zweiten Klammern durch $\mathcal{D}^{y_0, y_,}_{x_0, x_,}$ bezeichnet,

$$D^{y_0,\,y_,}_{x_0,\,x_,} + \mathfrak{A}^{y_0,\,y_,}_{x_0,\,x_,} = 0,$$

welches der zweite Hülfssatz ist.

Setzt man $\Phi(x) = \chi(\tau)$ für alle möglichen Werthe von x und τ, und nimmt an, dass für $x = x_0$ $\tau = \tau_0$ und für $x = x_,$ $\tau = \tau_,$ ist, so erhält man unmittelbar aus dem Begriffe des Excesses

$E^{x_0,\,x_,}(\Phi(x)) = E^{\tau_0,\,\tau_,}(\chi(\tau))$ und allgemeiner $E^{x_0,\,x_,}(F(\Phi[x])) = E^{\tau_0,\,\tau_,}(F(\chi[\tau]))$

Es kann auch $\chi(\tau)$ gleich einer Function von zwei Veränderlichen angenommen werden, z. B. $\chi(\tau) = \Phi(x,y)$, wenn nur dann in derselben einer der Veränderlichen ein bestimmter Werth beigelegt wird. Demnach ist, wenn man $\chi(\tau_0) = \Phi(x_0, y_0)$ und $\chi(\tau_,) = \Phi(x_,, y_0)$ hat,

$E^{y_0}_{x_0,\,x_,}(\Phi(x,y)) = E^{\tau_0,\,\tau_,}(\chi(\tau))$ und eben so $E^{y_0}_{x_0,\,y_,}(F(\Phi[x,y])) = E^{\tau_0,\,\tau_,}(F(\chi[\tau]))$.

Von dieser allgemeinen Relation der Excesse von Functionen verschiedener Veränderlichen wollen wir nun eine Anwendung auf $\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\tau$ machen. Bezeichnen x_0 und y_0 die Zahlenwerthe zweier beliebiger Grössen, und ist $\frac{x_0}{y_0} = \operatorname{tg}\tau_0$, wo man unter τ_0 den kleinsten der Bogen, deren Tangente $= \frac{x_0}{y_0}$ ist, zu verstehen hat, also τ_0 zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so kann man annehmen, dass, wenn in $\frac{x}{y}$ $x = +x_0$ ist, und y von $-y_0$ bis $+y_0$ wächst, in $\operatorname{tg}\tau$ τ_0 von $-\tau_0$ bis $+\tau_0$ zunimmt, und erhält also:

$$E^{-y_0,\,+y_0}_{+x_0}\left(\frac{x}{y}\right) = E^{-\tau_0,\,+\tau_0}(\operatorname{tg}\tau).$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man ferner:

$$E^{+y_0}_{+x_0,\,-x_0}\left(\frac{x}{y}\right) = -E^{+y_0}_{-x_0,\,+x_0}\left(\frac{x}{y}\right)^{*)} = E^{\tau_0,\,\pi-\tau_0}(\operatorname{tg}\tau);$$

$$E^{+y_0,\,-y_0}_{-x_0}\left(\frac{x}{y}\right) = -E^{-y_0,\,+y_0}_{-x_0}\left(\frac{x}{y}\right) = E^{\pi-\tau_0,\,\pi+\tau_0}(\operatorname{tg}\tau)$$

---

*) Dass $E^{b,a} = -E^{a,b}$ ist, also der Excess den entgegengesetzten Werth bekommt, wenn die Grenzen vertauscht werden, erhellet sogleich aus der Bedeutung des Excesses.

und endlich $E^{-y_0}_{-x_0,+x_0} = E^{\pi+\tau_0,2\pi-\tau_0}(\mathrm{tg}\ \tau)$.

Durch Addition ergiebt sich hieraus:

$$E^{-y_0,+y_0}_{+x_0}\left(\frac{x}{y}\right) - E^{+y_0}_{-x_0,+x_0}\left(\frac{x}{y}\right) - E^{-y_0,+y_0}_{-x_0}\left(\frac{x}{y}\right) + E^{-y_0}_{-x_0,+x_0}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= E^{-\tau_0,\tau_0}(\mathrm{tg}\ \tau) + E^{\tau_0,\pi-\tau}\ (\mathrm{tg}\ \tau) + E^{\pi-\tau_0,\pi+\tau_0}(\mathrm{tg}\ \tau) + E^{\pi+\tau_0,2\pi-\tau_0}(\mathrm{tg}\ \tau),$$

oder $D^{-y_0,+y_0}_{-x_0,+x_0}\left(\frac{x}{y}\right) = E^{-\tau_0,2\pi-\tau_0}\ (\mathrm{tg}\ \tau)$.

Die Function $\frac{ax-by}{ay+bx}$, wo a und b beliebige constante Grössen bedeuten, kann leicht auf die Form $\frac{\frac{x}{y}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{y}}$ gebracht werden, und, $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\ \tau_{,}$ gesetzt, wird $\frac{\frac{x}{y}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{y}} = \mathrm{tg}\ (\tau-\tau_{,})$. Hieraus geht hervor, dass $\frac{ax-by}{ay+bx}$ eben dieselbe Function von $\frac{x}{y}$ ist, wie $\mathrm{tg}\ (\tau-\tau_{,})$ von $\mathrm{tg}\ \tau$, und daher nach dem Obigen:

$$D^{-y_0,+y_0}_{-x_0,+x_0}\left(\frac{ax-by}{ay+bx}\right) = E^{-\tau_0,2\pi-\tau_0}(\mathrm{tg}(\tau-\tau_{,})).$$

$\mathrm{tg}\ (\tau-\tau_{,})$ wird aber zweimal, wenn τ_0 von $-\tau_0$ bis $2\pi-\tau_0$ continuirlich zunimmt, unendlich und geht beide Male vom Negativen zum Positiven über, also ist $E^{-\tau_0,2\pi-\tau_0}(\mathrm{tg}(\tau-\tau_{,})) = 2$, und man gelangt zu folgendem dritten Hülfssatze:

Bezeichnen x_0, y_0 beliebige Zahlenwerthe und sind a und b zwei constante Grössen, so ist:

$$D^{-y_0,+y_0}_{-x_0,+x_0}\left(\frac{ax-by}{ay+bx}\right) = 2.$$

Nachdem wir nun die drei Hülfssätze über den Excess vorausgeschickt haben, können wir genauer auf die Lösung der Aufgabe, die imaginären Wurzeln zu trennen, eingehen. Da bei diesen aber zwei verschiedene Grössen zu bestimmen sind, der reelle Theil und der Factor des imaginären, so können wir sie auch nur dann erst als getrennt ansehen, wenn für beide Grössen solche Grenzen angegeben sind, dass nur von einer Wurzel die entsprechenden Theile zwischen denselben liegen. Es müssen demnach sowohl für den reellen Theil als auch für den Factor des imaginären besondere Grenzen gesucht werden. Aber eben so, wie bei den reellen Wurzeln, beruht auch hier die Trennung auf einem Theorem, vermittelst dessen die Anzahl der zwischen bestimmten Grenzen enthaltenen imaginären Wurzeln angegeben wird.

Bekannt ist es, dass man jede Function, deren Element eine imaginäre veränderliche Grösse von der Form $x + yi$, $i = \sqrt{-1}$ gesetzt, ist, so entwickeln kann, dass sie in einen reellen und einen imaginären Theil zerfällt, also kann man $f(x + yi) = \Phi(x, y) + \psi(x, y)\, i$ setzen. Für jede Wurzel $x + yi$ der Gleichung $f(x, y) = 0$ muss sowohl $\Phi(x, y)$ als auch $\psi(x, y)$ verschwinden. Sind nun die gegebenen Grenzen für den reellen Theil $x_0, x_,$ und für den Factor des imaginären $y_0, y_,$, und wird, wenn man x_0 oder $x_,$ für x und y_0 oder $y_,$ für y in $\Phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ substituirt, keine derselben gleich Null, so kann man sich das zwischen diesen Grenzen enthaltene Intervall in unendlich viele, unendlich kleine Intervalle dergestalt getheilt denken, dass innerhalb eines jeden solchen Intervalles höchstens eine Wurzel liegt, dass ebenfalls, wie oben, wenn man die Werthe der Grenzen für x und y in $\Phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ hineinsetzt, keine der beiden Functionen gleich Null wird. Diese unendlich kleinen Intervalle sind nun von vierlei Art; entweder verschwindet innerhalb eines derselben keine der beiden Functionen $\Phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$, oder nur die erstere $\Phi(x, y)$, oder nur die letztere $\psi(x, y)$, oder endlich auch beide zugleich. Dass in den beiden ersten Fällen, wenn man den Excess der Function $\frac{\Phi(x, y)}{\psi(x, y)}$ in Betracht zieht, und x und $x + \omega_0$, y und $y + \omega_,$ respective die Grenzen für x und y in diesem Intervalle sind, $D^{y, y+\omega_,}_{x, x+\omega_0} = 0$ ist, bedarf keines weitern Be-

weises. Ferner ist auch im dritten Falle, wenn $\psi(x, y)$ innerhalb des Intervalles verschwindet, $D^{y, y+\omega_{,}}_{x, x+\omega_0} = 0$, da $\mathfrak{A}^{y, y+\omega_{,}}_{x, x+\omega_0} = 0$ und nach dem obigen zweiten Hülfssatze $D^{y, y+\omega_{,}}_{x, x+\omega_0} + \mathfrak{A}^{y, y+\omega_{,}}_{x, x+\omega_0} = 0$ ist. Es bleibt nun noch der vierte Fall zu betrachten übrig, wenn nämlich $\Phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ innerhalb eines solchen unendlich kleinen Intervalles zugleich verschwinden. Findet dieses für $x + yi$ statt, und bezeichnen α und β unendlich kleine Incremente von x und y, so hat man, da $f(x + yi) = 0$,

$$f(x + yi + \alpha + \beta i) = \Phi(x + \alpha, y + \beta) + \psi(x + \alpha, y + \beta)\, i = (f'(x + yi) + I)(\alpha + \beta i)\ ^{*}),$$

wo I eine unendlich kleine mit α und β veränderliche Grösse ist, oder:

$$\Phi(x + \alpha, y + \beta) + \psi(x + \alpha, y + \beta)\, i = A\alpha - B\beta + (B\alpha + A\beta)\, i,$$

wenn man $f'(x + yi) + I = A + Bi$ setzt. Daher auch:

$$D^{y-\beta, y+\beta}_{x-\alpha, x+\alpha}\left(\frac{\Phi(x, y)}{\psi(x, y)}\right) = D^{-\beta, +\beta}_{-\alpha, +\alpha}\left(\frac{A\alpha - B\beta}{B\alpha + A\beta}\right)$$

und, da nach dem dritten Hülfssatze letzterer Excess $= 2$ ist, **) hat man:

$$D^{y-\beta, y+\beta}_{x-\alpha, x+\alpha}\left(\frac{\Phi(x, y)}{\psi(x, y)}\right) = 2.$$

Fassen wir nun das Vorhergehende zusammen, so finden wir, dass für die Intervalle, innerhalb welcher keine Wurzel liegt, der Excess gleich Null, aber für solche Intervalle, die eine Wurzel enthalten, 2 ist. Hieraus geht nun hervor, dass:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left(D^{y_0 + n\omega_{,}, y + (n+1)\omega_{,}}_{x_0, x_0 + \omega_0}\right) = r,$$

ist, wenn für ein unendlich grosses n $\omega_0 = \frac{x_{,} - x_0}{n}$, $\omega_{,} = \frac{y_{,} - y_0}{n}$ gemacht

*) *Cauchy* Calcul différ. chap 13.

**) Genau genommen sind A und B nicht als constante Grössen zu betrachten, da sie mit α und β veränderlich sind; weil sie sich indessen nur um unendlich kleine Grössen ändern, so kann man sie als constant ansehen.

ist, und $r_{,}$ die Anzahl der imaginären Wurzeln zwischen den Grenzen x_0 und und $x_0 + \omega_0$ für x, y_0 und $y_{,}$ für y bedeutet. Man hat aber, da

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left(E_{x_0+\omega_0}^{y_0+n\omega_{,},\, y+(n+1)\omega_{,}}\right) = E_{x_0+\omega_0}^{y_0,\, y_{,}}, \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(E_{x_0}^{y_0+n\omega_{,},\, y+(n+1)\omega_{,}}\right) = E_{x_0}^{y_0,\, y}$$

und $\sum_{n=0}^{n=\infty} \left(E_{x_0,\, x_0+\omega_0}^{y_0+n\omega_{,}} - E_{x_0,\, x_0+\omega_0}^{y_0+(n+1)\omega_{,}}\right) = E_{x_0,\, x_0+\omega_0}^{y_0} - E_{x_0,\, x_0+\omega_0}^{y_{,}}$ ist,

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left(D_{x_0,\, x_0+\omega_0}^{y_0+n\omega_{,},\, y_0+(n+1)\omega_{,}}\right) = D_{x_0,\, x_0+\omega_0}^{y_0,\, y_{,}}, \text{ also}$$

$$D_{x_0,\, x_0+\omega_0}^{y_0,\, y_{,}} = 2r_{,}, \text{ und allgemein } D_{x_0+(m-1)\omega_0,\, x_0+m\omega_0}^{y_0,\, y_{,}} = 2r_m,$$

wenn r_m eine ähnliche Bedeutung, wie $r_{,}$, hat.

Hieraus folgt nun:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \left(D_{x_0+(m-1)\omega_0,\, x_0+m\omega_0}^{y_0,\, y_{,}}\right) = D_{x_0,\, x_{,}}^{y_0,\, y_{,}} = 2\,(r_1 + r_2 + r_3 \ldots).$$

Da $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots$ die Anzahl der imaginären Wurzeln zwischen den Grenzen, x_0 und $x_{,}$ für x, y_0 und $y_{,}$ für y angiebt, und jede imaginäre Wurzel gepaart vorkömmt, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden folgendes Theorem: *)

Ist $f(x)$ eine reelle continuirliche Function, und verschwindet, wenn man in $f(x + yi) = \Phi(x, y) + \psi(x, y)\,i$ für x x_0 oder $x_{,}$ und für y y_0 oder $y_{,}$ setzt, weder $\Phi(x, y)$ noch $\psi(x, y)$, so giebt $D_{x_0,\, x_{,}}^{y_0,\, y_{,}}\left(\frac{\Phi(x, y)}{\psi(x, y)}\right)$ die doppelte Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ an, deren reeller Theil zwischen

---

*) Dieses Theorem ist, wie schon früher bemerkt wurde, von *Cauchy* zuerst aufgestellt worden. In Grunert's Archiv d. Math. u. Phys. Bd. 1, S. 46 ff., findet sich ein Beweis dieses Theorems vom Abbé *Moigno*. Derselbe beruht aber auf geometrischen Betrachtungen, ähnlich denen, mittelst welcher *Mourey* (Grunert Archiv d. Math. u Phys. Bd. 1, S. 81 ff.) den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen, dass jede algebraische Gleichung mindestens eine Wurzel haben muss, beweist. Die im Obigen gegebene Herleitung des Cauchy'schen Theorems ist rein analytisch, und insofern in derselben die Zerlegung der Function $f(x)$ in einfache Factoren nicht vorausgesetzt wird, weist sie auch die Geltung desselben für transcendente Gleichungen nach.

den Grenzen x_0 und $x_,$, und der Factor des imaginären zwischen y_0 und $y_,$ liegt.

Es lässt sich $D^{y_0, y_,}_{x_0, x_,}\left(\frac{\Phi(x,y)}{\psi(x,y)}\right)$ bestimmen, wenn $\Phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, also $f(x) = 0$ zu den algebraischen Gleichungen gehört. Zieht man nun die Grenzen immer enger zusammen, bis man $D^{y_0, y_,}_{x_0, x_,} = 2$ hat, so gelangt man bei den algebraischen Gleichungen zur Trennung der imaginären Wurzeln; man ist aber nicht im Stande dieselben zu trennen, wenn die Gleichung eine transcendente ist. Bei den algebraischen Gleichungen erfordert indess die Trennung der imaginären Wurzeln auch meistentheils langwierige Rechnungen; denn man muss die Bestimmung der Hülfsfunctionen durch die Division in diesem Falle für jeden besondern Werth der Grenzen wiederholen; die Ausführung der Divisionen, ohne vorher für x oder y respective bestimmte Werthe gesetzt zu haben, würde zu solchen verwickelten Resten führen, dass die Substitution von besondern Werthen für x und y in dieselben noch zeitraubender wäre, als die wiederholte Bestimmung der Hülfsfunctionen für jeden besondern Werth der Grenzen. Ausserdem also, dass bei den imaginären Wurzeln 4 verschiedene Reihen von Hülfsfunctionen zu berechnen sind, indem D vier Excesse in sich fasst, während für die reellen Wurzeln eine hinreicht, muss noch diese vierfache Berechnung eines Excesses für jedes einzelne Intervall, innerhalb dessen man Wurzeln sucht, wiederholt werden, und es ist einleuchtend, dass die *Cauchy*'sche Methode, die imaginären Wurzeln zu trennen, der *Sturm*'schen Methode, dasselbe für die reellen Wurzeln zu erreichen, weit nachsteht, was den Rechnungsaufwand betrifft.

Wenn die Trennung der Wurzeln geschehen ist, welche, wie im Vorhergehenden gezeigt wurde, für die reellen Wurzeln bei allen Gleichungen, für die imaginären aber nur bei den algebraischen möglich ist, so bleibt noch eine zweite Rechnung, nämlich die genauere Bestimmung der einzelnen Wurzeln, übrig. Es giebt zwei Klassen von Näherungsmethoden, die sich wesentlich von einander unterscheiden. Vermittelst der einen Art erhält man successive Werthe, welche sich der gesuchten Wurzel beständig so nähern, dass sie abwechselnd

kleiner und grösser als dieselbe sind. Dieses geschieht, wenn man die Wurzel in einen Kettenbruch oder in eine Reihe von der Form: $a + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \ldots$, welche nothwendig convergent ist, entwickelt. Wie man bei reellen Wurzeln, um dieses zu erreichen, zu verfahren hat, ist hinlänglich von *Lagrange*, dem Urheber dieser Entwicklungsarten, und *Stern* erörtert worden. Hier soll nur nachgewiesen werden, dass diese Methode auch auf die genauere Berechnung der imaginären Wurzeln einer algebraischen Gleichung angewandt werden kann, seitdem *Cauchy* eine Methode, diese Wurzeln zu trennen, angegeben hat. Es seien a und b angenäherte Werthe für x und y der Wurzel $x + yi$ in der Gleichung $f(x + yi) = 0$. Man setze nun für $x + yi$ in dieselbe $a + \frac{1}{x_1} + \left(b + \frac{1}{y_1}\right) i$ und ordne nach den Potenzen von x_1 und y_1; hierdurch erhält man eine neue Gleichung von der Form $f_1(x_1 + y_1 i) = 0$. Vermittelst der *Cauchy*'schen Methode kann man in derselben für x_1 und y_1, die Näherungswerthe a_1 und b_1 so bestimmen, dass diese die ganzen Zahlen sind, welche den Werthen von x_1 und y_1 am nächsten kommen. Substituirt man nun wiederum in $f_1(x_1 + y_1 i) = 0$ für $x_1 + y_1 i$ $a_1 + \frac{1}{x_2} + \left(b_1 + \frac{1}{y_2}\right) i$, so erhält man eine zweite Gleichung $f_2(x_2 + y_2 i) = 0$, aus welcher man auf eben dieselbe Weise für x_2 und y_2 die Näherungswerthe a_2 und b_2 finden kann, wie aus $f_1(x_1 + y_1 i) = 0$ a_1 und b_1. Fährt man so fort, so erhält man für x und y die Kettenbrüche:

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \qquad y = b + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ldots}}}$$

welche abbrechen, wenn x und y rationale Werthe haben, im entgegengesetzten Falle aber ins Unendliche fortgehen. — Setzt man in $f(x + yi) = 0$ der Reihe nach für x und y, $a + \frac{1}{x_1}$, $b + \frac{1}{y_1}$, $a + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 x_2}$, $b + \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_1 y_2}$

u. s. w., bestimmt übrigens aus den durch diese Substitutionen erhaltenen Gleichungen $f_1(x_1+y_1 i)=0$, $f_2(x_2+y_2 i)=0$ u. s. w. eben so, wie vorher, respective die angenäherten Werthe a_1, b_1; a_2, b_2 u. s. w. für x_1, y_1; x_2, y_2 u. s. w., so erhält man folgende Entwickelungen für x und y, nämlich:

$$x = a + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \ldots, \quad y = b + \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_1 b_2 b_3} - \ldots$$

Auf das Genauere in der Berechnung bei diesen Methoden soll nicht weiter eingegangen, eben so wenig eine Erörterung des Falles gegeben werden, wenn mehrere Wurzeln dieselben Grenzen haben. Da alles dieses sich bei den imaginären Wurzeln eben so gestaltet, wie bei den reellen, so genüge hier die Hinweisung auf *Stern*'s Bemerkungen hierüber in seiner Theorie der Kettenbrüche, Berlin 1832. Derselbe hat schon in Bezug auf die reellen Wurzeln auf die Weitläufigkeit der Rechnung hingewiesen, wenn man eine dieser Näherungsmethoden anwendet, indem sich die Mühe, die Grenzen von Wurzeln zu bestimmen, jedes Mal bei der Berechnung eines mehr genäherten Werthes wiederholt. Bei den imaginären Wurzeln werden aber die Rechnungen nur noch verwickelter, weil hier die Trennung einen unverhältnissmässig grössern Rechnungsaufwand erfordert. Die zweite Klasse von Näherungsmethoden liefert eine solche Reihe von angenäherten Werthen, die entweder sämmtlich grösser oder kleiner als der wahre Werth der Wurzel sind. Wenn man indess beide Grenzen anwendet, kann man aus denselben vermittelst dieser Methoden neue, immer engere, Grenzen bestimmen und sich so von beiden Seiten her dem wahren Werthe jeder Wurzel beliebig nähern. Das Princip, worauf die Anwendung dieser Methoden beruht, ist in folgendem Theorem enthalten:

Wenn zu einer gegebenen Gleichung $f(x)=0$ vier andere,

$$\Phi_1(x)=0,\ \Phi_2(x)=0,\ \psi_1(x)=0,\ \psi_2(x)=0,$$

in solcher Beziehung stehen, dass

$$\Phi_1(a) = f(a) = \Phi_2(a)$$
$$\psi_1(b) = f(b) = \psi_2(b)$$

und für jeden zwischen a und b liegenden Werth von x

$$\Phi_1(x) < f(x) < \Phi_2(x)$$
$$\psi_1(x) < f(x) < \psi_2(x)$$

ist, so müssen, wenn $f(x) = 0$ zwischen a und b eine reelle Wurzel x' hat, nothwendig zwei jener Gleichungen auch Wurzeln zwischen a und b enthalten, durch welche x' näher begrenzt wird, als durch a und b; und zwar liefern $\Phi_1(x) = 0$ und $\psi_2(x) = 0$, wenn $f(a)$ positiv und $f(b)$ negativ ist, dagegen $\Phi_2(x) = 0$ und $\psi_1(x) = 0$, wenn $f(a)$ negativ und $f(b)$ positiv ist, diese nähern Grenzen für x'.

Die vier Hülfsgleichungen lassen sich nun aus der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ vermittelst der *Taylor*'schen Reihe herleiten. Wie *Lagrange* und *Cauchy* nachgewiesen haben, ist:

$$(1)\quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{\overset{(m)}{f}(a\ldots x)}{1.2.3..m}(x-a)^m,$$

wo $\overset{(m)}{f}(a\ldots x)$ die Grösse bezeichnet, in welche sich $\overset{(m)}{f}(x)$ verwandelt, wenn man für x eine zwischen x und a liegende Grösse substituirt, $\frac{\overset{(m)}{f}(a\ldots x)}{1.2.3..m}(x-a)^m$ also die Ergänzung der *Taylor*'schen Reihe angiebt. Nimmt man nun an, dass $\overset{(m)}{f}(x)$ sein Zeichen nicht ändert zwischen den Grenzen a und b und innerhalb dieses Intervalles beständig entweder zu- oder abnimmt, welches aus dem Verhalten von $\overset{(m+1)}{f}(x)$ zu erkennen ist, so kann man die vier Gleichungen:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{\overset{(m)}{f}(a)}{1.2.3\ldots m}(x-a)^m = 0,$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{\overset{(m)}{f}(b)}{1.2.3\ldots m}(x-a)^m = 0,$$

$$f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{1.2}(x-b)^2 + \ldots + \frac{\overset{(m)}{f}(a)}{1.2.3\ldots m}(x-b)^m = 0,$$

$$f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{1.2}(x-b)^2 + \ldots + \frac{\overset{(m)}{f}(b)}{1.2.3\ldots m}(x-b)^m = 0$$

als Hülfsgleichungen anwenden, was aus der Vergleichung derselben mit Gl. (1)

erhellt. Welche von ihnen nun respective als $\Phi_1(x) = 0$, $\Phi_2(x) = 0$, $\psi_1(x) = 0$ oder $\psi_2(x) = 0$ zu wählen ist, richtet sich nach dem Vorzeichen von $\overset{(m)}{f}(x)$ zwischen den Grenzen a und b, und ob diese Grösse zu- oder abnimmt, und lässt sich in jedem besondern Falle leicht entscheiden. Wenn man $m = 1$ setzt, also bei der ersten Potenz in der Entwicklung stehen bleibt, so ergiebt sich die von *Fourier* verbesserte *Newton*'sche Näherungsmethode, und in der Praxis ist auch diese wohl die bequemste; denn, wenn auch für den Fall, dass man die höhern Potenzen in der Entwicklung mit in Betracht zieht, die Convergenz vergrössert wird, so macht dagegen die Auflösung einer Gleichung von einem höhern als dem ersten Grade ungleich mehr Mühe. *Cauchy* hat etwas andere Hülfsgleichungen, als die oben angeführten sind, in Anwendung gebracht. Bezeichnen nämlich $\pi(x)$ und $\nu(x)$ resp. die Summen der positiven und negativen Glieder in der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$, so dass man hat $f(x) = \pi(x) - \nu(x)$ und daher auch $\overset{(m)}{f}(x) = \overset{(m)}{\pi}(x) - \overset{(m)}{\nu}(x)$, so sind die von diesem Mathematiker aufgestellten Hülfsgleichungen folgende:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{(\overset{(m)}{\pi}(a) - \overset{(m)}{\nu}(b))}{1.2.3\ldots m}(x-a)^m = 0,$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{(\overset{(m)}{\pi}(b) - \overset{(m)}{\nu}(a))}{1.2.3\ldots m}(x-a)^m = 0,$$

$$f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{1.2}(x-b)^2 + \ldots + \frac{(\overset{(m)}{\pi}(a) - \overset{(m)}{\nu}(b))}{1.2.3\ldots m}(x-b)^m = 0,$$

$$f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{1.2}(x-b)^2 + \ldots + \frac{(\overset{(m)}{\pi}(b) - \overset{(m)}{\nu}(a))}{1.2.3\ldots m}(x-b)^m = 0.$$

Zur Anwendung dieser ist es nun nicht nöthig, die Grenzen a und b so weit zusammenzuziehen, bis $\overset{(m)}{f}(x)$ zwischen diesen Grenzen sein Zeichen nicht ändert und beständig zu- oder abnimmt, sondern dieselben können beliebig gewählt sein, sogar mehr als eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen sich enthalten, in welchem Falle man sich freilich wiederum nur der grössten und kleinsten der in diesem Intervalle liegenden Wurzeln nähert. Es ist aber

ersichtlich, dass das vorher angeführte Theorem nur für reelle Wurzeln gilt. Daher lässt sich diese zweite Klasse von Näherungsmethoden auch nicht auf die imaginären Wurzeln ausdehnen. Man könnte freilich das *Newton*'sche Princip in Anwendung bringen, und, wenn man $f(x+yi) = \Phi(x, y) + \psi(x, y)\, i$ setzt, aus den beiden linearen Gleichungen:

$$\Phi(a, b) + \frac{d\Phi(a, b)}{da}\alpha + \frac{d\Phi(a, b)}{db}\beta = 0,$$

$$\psi(a, b) + \frac{d\psi(a, b)}{da}\alpha + \frac{d\psi(a, b)}{db}\beta = 0,$$

welche auch, weil

$$\Phi(x, y) = f(x) - \frac{f''(x)}{1.2}y^2 + \frac{f^{\text{IV}}(x)}{1.2.3.4}y^4 - \ldots$$

$$\psi(x, y) = f'(x)y - \frac{f'''(x)}{1.2}y^3 + \frac{f^{\text{V}}(x)}{1.2.3.4.5}y^5 - \ldots$$

und daher

$$\frac{d\psi(x, y)}{dx} = -\frac{d\Phi(x, y)}{dy} \text{ und } \frac{d\psi(x, y)}{dy} = \frac{d\Phi(x, y)}{dx}$$

ist, so geschrieben werden können:

$$\Phi(a, b) + \frac{d\Phi(a, b)}{da}\alpha + \frac{d\psi(a, b)}{db}\beta = 0,$$

$$\psi(a, b) - \frac{d\Phi(a, b)}{db}\alpha + \frac{d\Phi(a, b)}{da}\beta = 0,$$

die Correctionen α und β, die an a und b anzubringen sind, um einen genauern Werth der Wurzel, als $a + bi$, zu erhalten, bestimmen. Da man hier indess die höhern Potenzen von α und β in den Entwicklungen von $\Phi(a+\alpha, b+\beta)$ und $\psi(a+\alpha, b+\beta)$ ohne Weiteres weglässt, so bedarf es hier, eben so wie bei der *Fourier-Newton*'schen Methode für die reellen Wurzeln, eines besondern Kennzeichens, um zu entscheiden, ob a und b den wahren Werthen x und y schon so weit genähert sind, dass die höhern Potenzen von α und β, ohne einen grossen Fehler zu begehen, vernachlässigt werden können. Ein solches Kennzeichen ist aber, so viel mir bekannt, noch nicht aufgestellt, und möchte auch

wohl nicht so leicht aufzufinden sein, da hier zwei veränderliche Grössen in Betracht kommen. Daher darf man das Newton'sche Prinzip nicht ohne Vorsicht zur approximativen Berechnung der imaginären Wurzeln anwenden, und es kann leicht geschehen, dass man sich, anstatt eine grössere Annäherung zu erhalten, von dem wahren Werthe der Wurzel nur weiter entfernt.

Wenn auch die Methoden, welche auf dem ersten Prinzipe beruhen, für die Berechnung der reellen Wurzeln genügen, so sind sie dagegen zur Bestimmung der imaginären unzureichend, und diese Lücke ist in den letzten Jahren durch die *Gräffe-Encke*'sche Methode ausgefüllt, die auch für die imaginären Wurzeln ohne zu grossen Rechnungsaufwand und auf directem Wege zum Ziele führt. Dass diese sowohl als die Methode vermittelst der recurrirenden Reihen auf das zweite der im Eingange dieser Schrift bezeichneten Prinzipe zurückzuführen ist, sollte nun weiter im zweiten Theile der Abhandlung gezeigt werden. Unvorhergesehene Umstände indess nöthigen mich hier abzubrechen und die Methoden, welche sich der symmetrischen Functionen zur Bestimmung der Wurzeln bedienen, unberücksichtigt zu lassen.

Jahresbericht.

Die beiden im Januar des v. J. von Sr. Königlichen Majestät allergnädigst ernannten Lehrer des Gymnasiums, Herr Professor Dr. *Bendixen* und Herr Dr. *Brandis* wurden am 16. April desselben Jahres auf hergebrachte Weise öffentlich in die ihnen anvertrauten Aemter *eingeführt.* Meine lateinische Einführungsrede zeigte in gedrängter Kürze, wie wichtig für die Wirksamkeit des Gymnasiallehrers die sorgfältige Beachtung eigner und fremder Erfahrung sei. Herr Prof. Bendixen stellte in deutscher Sprache „F. v. Schiller als Vertreter unserer Gymnasien" dar, und Herr Dr. Brandis beantwortete, ebenfalls in deutscher Sprache, die Frage: „Wodurch wird wahre Geistesbildung erreicht?"

Bald nach der feierlichen Introduction der neuen Lehrer wurden die *Ordinarien* der einzelnen Klassen ernannt. Für Prima ward das Ordinariat dem Prof. Bendixen, für Secunda dem Prof. Frandsen, für Tertia dem Dr. Brandis, für Quarta dem Dr. Feldmann, für Quinta dem Dr. Andresen übertragen. Diese Lehrer haben danach die besondere Fürsorge für die Schüler der ihrer Obhut anvertrauten Klassen übernommen. Sie suchen seitdem das Beste der Klasse, welcher sie vorstehen, und jedes Mitgliedes derselben zu fördern, wo sie nur können, und werden es sich fortwährend angelegen sein lassen, auf den Geist der Jugend überhaupt und auf die zweckmässige Einrichtung der Studien jedes einzelnen Schülers einen immer heilsameren Einfluss zu gewinnen. Sie werden es gern sehen, wenn Eltern oder Vormünder wegen ihrer Söhne und Pflegbefohlenen in vorkommenden Fällen sich an sie wenden, so wie sie wieder ihrerseits, wo es nöthig scheinen sollte, mit den Eltern und Vormündern Rücksprache nehmen werden. Da es meine Aufgabe ist, den gemeinschaftlichen Mittelpunkt für alle Ordinariate zu bilden, so werde auch ich gern bereit sein, wann es verlangt wird, nähere Auskunft zu geben.

Die *innere Einrichtung* des Gymnasiums ist nach der Besetzung der vacant gewesenen Lehrstellen im Wesentlichen dieselbe geblieben. Kleine Verbesserungen und Erweiterungen des Lehrplans, so wie die Vertheilung der Lehrgegenstände unter die einzelnen Lehrer zeigt die angefügte *Lectionentabelle.* Die Abgränzung der Lehrcurse in den einzelnen Klassen wird der zu erwartende allgemeine *Lehrplan* für das Christianeum enthalten.

Das *Gähler*'sche *Stipendium* von jährlich 500 ℔ ist nach dem Ausfall der mit den Bewerbern angestellten Prüfung durch das einstimmige Urtheil des Gymnasiarchal- und Lehrer-Collegiums dem damaligen Selectaner *Vezin*, aus Kiel, auf drei Jahre zuerkannt worden. Diese Entscheidung ward ihm nach gehaltenen Abschiedsreden auf dem Hörsaal durch den Herrn Conferenzrath *Donner*, als ersten Administrator jenes Stipendiums, in einer angemessenen Anrede bekannt gemacht. Zu gleicher Zeit ward das Eine der beiden grösseren *Schröder*'schen Stipendien, das diesmal einem Studiosen der Medicin zufallen sollte, von den Herren Gymnasiarchen dem damaligen Selectaner *Schwarz*, aus Altona, ebenfalls auf drei Jahre conferirt.

Das zweite *Schröder*'sche Stipendium ist vacant. Wir rechneten um Michaelis auf zwei tüchtige Bewerber. Kränklichkeit hielt damals beide ab, sich zur Prüfung zu stellen. Auch jetzt fehlt ein Bewerber. Den Einen von jenen beiden veranlassten dringende Umstände, gleich nach Michaelis zur Universität überzugehen; den Andern rief der unerforschliche Rathschluss des Höchsten zu unserm innigsten Bedauern vom Schauplatz seines irdischen Wirkens unerwartet ab.

Der *Gymnasialbibliothek* hat Herr Conferenzrath und Professor *Schumacher*, Commandeur v. D. u. D. M., Ritter m. O., auch im verflossenen Jahr die Fortsetzung der astronomischen Nachrichten; Herr Etatsrath *Klausen*, R. v. D. u. D. M., theils sein Gedicht „an den Grafen und die Gräfin von Blücher-Altona bei der Feier ihrer goldenen Hochzeit", theils von der Zeitschrift für Alterthumswissenschaft die Jahrgänge von 1835 bis 1840; Herr Pastor Dr. theol. *Gad*, durch Vermittlung des Herrn Etatsr. Klausen, *Bröndsteds* Reise i Grækenland, 2 Dele, Kiöbenh. 1844, *Werlauff*'s historiske Efterretninger om det store kongelige Bibliothek i Kiöbenhavn, 1844, Orestias, Trilogie af Aeschylos, metrisk oversat af P. O. Bröndsted, Kiöbenh. 1844, und dansk Bydlære og dansk Kjönslære af *J. Levin*, Kiöbenh. 1844; endlich Herr Buchhändler *Vieweg* in Braunschweig *Madvig*'s lateinische Sprachlehre nebst *dessen* Bemerkungen über verschiedene Punkte des Systems der lateinischen Sprachlehre (Brschw. 1844) gütigst geschenkt. Wir wiederholen für diese Beweise freundlicher Theilnahme unsern wärmsten Dank. Mit gleicher Dankbarkeit muss ich noch erwähnen, dass unsere *Progammen-Sammlung* theils durch die Programme der Gymnasien, die sich an den Verein norddeutscher Schulmänner und Philologen angeschlossen haben, theils durch die Programme der sämmtlichen dänischen Gymnasien ansehnlich vermehrt worden ist.

Was die *Frequenz* des Gymnasiums anbetrifft, so betrug im letzten Semester die Zahl der Primaner 10, der Secundaner 7, von denen Einer im ersten Quartal uns verliess, der Tertianer 13, der Quartaner 14, von denen Einer um Neujahr abgegangen ist, der Quintaner 11.

Zur Universität ist mit dem Zeugniss der Reife um Michaelis übergegangen

Adolph Gustav Bleyer,

aus Altona.

Jetzt glaubten wir zwei unserer Schüler dahin entlassen zu können. Im Rath der Vorsehung war es anders beschlossen. *Ivan von Dadelszen*, der durch Fleiss und Betragen sich auf das rühmlichste bei uns auszeichnete, ward uns vor Kurzem plötzlich durch den Tod entrissen. Sein Andenken ist uns theuer. Jetzt wird nur der bisherige Primaner

Caspar Theodor Kraus,

aus Altona,

zur Universität abgehen. Unter den obwaltenden Umständen ist er von der Abschiedsrede dispensirt.

Auf diese Weise habe ich *nur das öffentliche Examen* der Theilnahme unserer Mitbürger angelegentlichst zu empfehlen. Es wird diesmal an 2 Tagen in folgender Ordnung mit den verschiedenen Klassen angestellt werden:

Mittwoch:

9—11. I. *E.* Cicero. *B.* Deutsche Literatur. *F* Geschichte. *Br.* Mathematik.
11—1. II. *B.* Religion. *F.* Xenophon. *Br.* Physik. *Fm.* Englisch.
3—5. III. *Br.* Homer. *Fm* Geschichte. *A.* Cicero. *S.* Französisch.

Donnerstag:

9—11. IV. *P.* Gesang. *A.* Religion. *Fm.* Griechisch. *A.* Geographie. *S.* Französisch.
11—1. V. *Br.* Naturgeschichte. *A.* Latein, Geographie und Geschichte. *Kr.* Rechnen.

Zur freundlichen Theilnahme an dieser Schulfeierlichkeit lade ich im Namen des Lehrercollegiums Se. Excellenz unsern verehrungswürdigen Herrn Protogymnasiarchen, die übrigen Mitglieder des hochansehnlichen Gymnasiarchal-Collegiums, den hochlöblichen Magistrat, das ehrwürdige Ministerium, die bürgerlichen Collegien der Stadt, die Eltern unserer Schüler, so wie Jeden, der sich für Wissenschaft und höhere Bildung interessirt, ehrerbietig ein.

LECTIONEN-TABELLE.

Ostern 1845.

Stunden.	Montags.	Dienstags.	Mittwochs.	Donnerstags.	Freitags.	Sonnabends.
			Prima.			
7— 8	.....	*B.* Dänisch.	*Fm.* Englisch.	*Br.* Mathematik.	*Br.* Mathematik.	*E.* Griech. Liter.
8— 9	*B.* Religion.	*B.* Religion.	*E.* Cicero.	*E.* Lat. Stil.	*E.* Lat. Stil.	*F.* Philosophie.
9—10	*E.* Cicero.	*E.* Cicero.	*F.* Geschichte.	*E.* Sophokles.	*E.* Sophokles.	*B.* Platon.
10—11	*E.* Demosthenes.	*E.* Demosthenes.	*E.* Gr. Gr. u. Schr.	*F.* Geschichte.	*F.* Geschichte.	*B.* Deutsche Sprache und Liter.
11—12	*S.* Französisch.	*S.* Französisch.	*B.* Deutsche Spr. u. Lit.	*B.* Hebräisch.	*B.* Hebräisch.	
2— 3	*Br.* Physik.	*Br.* Mathematik.	.....	*B.* Horaz.	*B.* Horaz.	
3— 4	*F.* Tacitus.	*F.* Tacitus.				
			Secunda.			
7— 8	.....	.....	.....	*B.* Dänisch.	*E.* Cicero.	*B.* Hebräisch.
8— 9	*S.* Französisch.	*S.* Französisch.	*B.* Hebräisch.	*E.* Cicero.	*B.* Deutsche Spr.	*B.* Religion.
9—10	*B.* Virgil.	*B.* Virgil.	*B.* Religion.	*B.* Deutsche Spr.	*F.* Herodot.	*F.* Gr. Gr. u. Schr.
10—11	*F.* Livius.	*F.* Livius.	*F.* Herodot.	*F.* Herodot.	*Br.* Mathematik.	*Br.* Mathematik.
11—12	*F.* Geschichte.	*F.* Geschichte.	*E.* Cicero.	*Br.* Mathematik.	*F.* Lat. Stil.	
2— 3	*E.* Homer.	*E.* Homer.	.....	*F.* Lat. Stil.	*Fm.* Englisch.	
3— 4	*Br.* Geographie.	*Br.* Geographie.	.....	*Br.* Physik.		
			Tertia.			
7— 8	*B.* Dänisch.	*K.* Schreiben.	*Fm.* Deutsche Spr.	*B.* Religion.	*B.* Religion.	*K.* Zeichnen.
8— 9	*K.* Rechnen.	*F.* Xenophon.	*Br.* Ovid.	*Br.* Ovid.	*Br.* Cäsar.	*Br.* Cäsar.
9—10	*F.* Xenophon.	*Br.* Mathematik.	*B.* Homer.	*Br.* Naturwissensch.	*Br.* Naturwissensch.	*Fm.* Deutsche Spr.
10—11	*Br.* Mathematik.	*Br.* Geographie.	*A.* Cicero.	*S.* Französisch.	*S.* Französisch.	*Fm.* Englisch.
11—12	*Br.* Geographie.	.....	*P.* Singen.	.....	.....	*P.* Singen.
12— 1	.....	*Fm.* Geschichte.	.....	*A.* Lateinschreiben.	*A.* Lat. Gramm.	
2— 3	*Fm.* Geschichte.	*A.* Cicero.	.....	*F.* Xenophon.	*F.* Gr. Gr. u. Schr.	
3— 4	*A.* Cicero.					
			Quarta.			
7— 8	.....	.....	.....	.....	*B.* Dänisch.	*A.* Geographie.
8— 9	*Fm.* Deutsche Spr.	*Fm.* Deutsche Spr.	*A.* Geographie.	*A.* Religion.	*A.* Religion	*A.* Lat. Gramm.
9—10	*Fm.* Griechisch.	*Fm.* Griechisch.	*A.* Lateinschreiben.	*Fm.* Lat. Lesebuch.	*Fm.* Lat. Lesebuch.	*Br.* Naturgeschichte
10—11	*S.* Französisch.	*S.* Französisch.	*Br.* Naturgesch.	*Fm.* Geschichte.	*Fm.* Geschichte.	*K.* Math. Anfngsgr.
11—12	*A.* Nepos.	*A.* Nepos.	*Fm.* Englisch.	*K.* Rechnen.	*K.* Rechnen.	*P.* Singen.
12— 1	.....	.....	*P.* Singen.	.....	.....	
2— 3	*K.* Schreiben.	*K.* Zeichnen.	.....	*Fm.* Griechisch.	*Fm.* Griechisch.	
3— 4	*Fm.* Lat. Dichter.	*Fm.* Lat. Lesebuch.	.....	*K.* Schreiben.	*K.* Zeichnen.	
			Quinta.			
8— 9	*A.* Religion.	*A.* Religion.	*Br.* Naturgesch.	*Fm.* Deutsche Spr.	*Fm.* Deutsche Spr.	*Br.* Naturgeschichte
9—10	*A.* Geschichte.	*A.* Geschichte.	*K.* Rechnen.	*A.* Geographie.	*A.* Geographie.	*Fm.* Deutsche Spr.
10—11	*K.* Rechnen.	*K.* Rechnen.	*A.* Latein.	*K.* Rechnen.	*K.* Rechnen.	*K.* Rechnen.
11—12	*K.* Schreiben.	*K.* Schreiben.	*S.* Französisch.	*A.* Latein.	*A.* Latein.	*S.* Französisch.
2— 3	*A.* Latein.	*A.* Latein.	.....	*K.* Schreiben.	*K.* Schreiben.	
3— 4	*K.* Zeichnen.	*K.* Zeichnen.	.....	*P.* Singen.	*P.* Singen.	

Die *Nichtstudirenden* in Tertia und Quarta können während der griechischen Lectionen an dem Unterricht in der nächst höheren oder nächst niedrigeren Klasse, nach dem Ermessen der Lehrer, Theil nehmen. Am Montage von 9—10 und am Dienstage von 9—10 wird Herr *Kroymann* den Theilnehmern aus beiden Klassen, am Mittwoch von 10—11 besonders denen aus Tertia Anleitung zum *kaufmännischen Rechnen* geben.

LECTIONEN-TABELLE.

Ostern 1843.

Stun-den.	Montage.	Dienstage.	Mittwochs.	Donnerstage.	Freitage.	Sonnabends.
			Prima.			
7— 8	.....	R. Deutsch.	Fn. Englisch.			
8— 9	R. Religion.	R. Religion.	K. Cicero.	Fn. Mathematik.	Fn. Mathematik.	K. Griech. Liter.
9—10	K. Cicero.	K. Cicero.	F. Geschichte.	K. Lat. Stil.	K. Lat. Stil.	F. Philosophie.
10—11	K. Demosthenes.	K. Demosthenes.	K. Gr. Gr. u. Sehr.	K. Sophokles.	K. Sophokles.	R. Plato.
11—12	S. Französisch.	S. Französisch.	R. Deutsche Spr. u. Lit.	F. Geschichte.	F. Geschichte.	R. Deutsche Sprache und Liter.
2— 3	Fn. Physik.	Fn. Mathematik.		R. Hebräisch.	R. Hebräisch.	
3— 4	K. Tacitus.	F. Tacitus.	.....	R. Horaz.	R. Horaz.	
			Secunda.			
7— 8	.....	.....	.....	R. Deutsch.		
8— 9	S. Französisch.	S. Französisch.	R. Hebräisch.	K. Cicero.	K. Cicero.	R. Hebräisch.
9—10	R. Virgil.	R. Virgil.	R. Religion.	R. Deutsche Spr.	R. Deutsche Spr.	R. Religion.
10—11	F. Livius.	F. Livius.	F. Herodot.	F. Herodot.	F. Herodot.	K. Gr. Gr. u. Sehr.
11—12	K. Geschichte.	F. Geschichte.	K. Cicero.	Fn. Mathematik.	Fn. Mathematik.	Fn. Mathematik.
2— 3	K. Homer.	K. Homer.	.....	F. Lat. Stil.	F. Lat. Stil.	
3— 4	Fn. Geographie.	Fn. Geographie.	.....	R. Physik.	Fn. Englisch.	
			Tertia.			
7— 8	R. Deutsch.					
8— 9	K. Sehreiben.	K. Sehreiben.	Fn. Deutsche Spr.	R. Religion.	R. Religion.	K. Zeichnen.
9—10	K. Xenophon.	F. Xenophon.	R. Ovid.	R. Ovid.	R. Cicero.	R. Cicero.
10—11	Fn. Mathematik.	R. Mathematik.	R. Homer.	Fn. Naturwissenschaft.	Fn. Naturwissenschaft.	Fn. Deutsche Spr.
11—12	Fn. Geographie.	Fn. Geographie.	F. Cicero.	S. Französisch.	S. Französisch.	Fn. Englisch.
12— 1	.....	.....	F. Singen.	.....	.....	F. Singen.
2— 3	Fn. Geschichte.	Fn. Geschichte.	.....	F. Lateinschreiben.	F. Lat. Grammatik.	
3— 4	F. Cicero.	F. Cicero.	.....	F. Xenophon.	F. Gr. Gr. u. Sehr.	
			Quarta.			
7— 8	.....	.....	.....	.....	R. Deutsch.	
8— 9	Fn. Deutsche Spr.	Fn. Deutsche Spr.	F. Geographie.	F. Religion.	F. Religion.	F. Geographie.
9—10	Fn. Griechisch.	Fn. Griechisch.	F. Lateinschreiben.	Fn. Lat. Lesebuch.	Fn. Lat. Lesebuch.	F. Lat. Grammatik.
10—11	S. Französisch.	S. Französisch.	R. Naturgesch.	Fn. Geschichte.	Fn. Geschichte.	R. Naturgeschichte.
11—12	F. Xenophon.	F. Xenophon.	Fn. Englisch.	F. Rechnen.	F. Rechnen.	F. Math. Aufgaben.
12— 1	.....	.....	F. Singen.	.....	.....	F. Singen.
2— 3	F. Schreiben.	F. Zeichnen.	.....	Fn. Geschichte.	Fn. Geschichte.	
3— 4	Fn. Lat. Diktiren.	Fn. Lat. Lesebuch.	.....	F. Schreiben.	F. Zeichnen.	
			Quinta.			
8— 9	F. Religion.	F. Religion.	R. Naturgesch.	Fn. Deutsche Spr.	Fn. Deutsche Spr.	Fn. Naturgeschichte
9—10	F. Geschichte.	F. Geschichte.	F. Rechnen.	F. Geographie.	F. Geographie.	Fn. Deutsche Spr.
10—11	F. Rechnen.	F. Rechnen.	F. Latein.	F. Rechnen.	F. Rechnen.	F. Rechnen
11—12	F. Schreiben.	F. Schreiben.	S. Französisch.	F. Latein.	F. Latein.	S. Französisch.
2— 3	F. Latein.	F. Latein.	.....	F. Schreiben.	F. Schreiben.	
3— 4	F. Zeichnen.	F. Zeichnen.	.....	F. Singen.	F. Singen.	

Die Nichtstudirenden in Tertia und Quarta können während der gründlichen Lectionen an dem Unterricht in der nächst höheren oder nächst niedrigeren Klasse, nach dem Ermessen der Lehrer, Theil nehmen. Am Montage von 9—10 und am Dienstage von 9—10 wird Herr Aeropagus den Theilnehmern aus beiden Klassen, am Mittwoch von 10—11 besonders dazu in Tertia Anleitung zum Aufgabschreiben Fertigen geben.