Zu der

öffentlichen Prüfung

der Schüler

des

Königlichen Gymnasiums in Altona

am Donnerstage, dem 14. April,

so wie zu den

Abschiedsreden der zur Universität übergehenden Primaner

am Freitage, dem 15. April,

ladet

das Hochverehrliche Gymnasiarchal-Collegium,

den Hochlöblichen Magistrat, das Ehrwürdige Ministerium,

die Bürgerlichen Collegien der Stadt,

die Eltern und Angehörigen der Schüler, alle Freunde des

Gymnasiums und der gelehrten Schulbildung

achtungsvoll ein

Professor Dr. **M. J. F. Lucht**, Director,

Ritter des Danebrogordens.

BIBLIOTHECA BIBL. CHRISTIANEI ALTONENSIS

Inhalt:

1. Abhandlung des vierten Lehrers Dr. J. H. Scharenberg: Die Anwendung beliebig vieler Coordinaten in der analytischen Geometrie. Mit einer Figurentafel.

2. Jahresbericht des Directors.

Altona, 1859.

Zu der

öffentlichen Prüfung

der Schüler

des

Königlichen Gymnasiums in Altona

am Donnerstage, dem 14. April,

so wie zu den

Abschiedsreden der zur Universität übergehenden Primaner

am Freitage, dem 15. April,

ladet

das Hochverehrliche Gymnasiarchal-Collegium,

den Hochlöblichen Magistrat, das Ehrwürdige Ministerium,
die Bürgerlichen Collegien der Stadt,
die Eltern und Angehörigen der Schüler, alle Freunde des
Gymnasiums und der gelehrten Schulbildung

achtungsvoll ein

Professor Dr. **M. J. F. Lucht**, Director,
Ritter des Danebrogordens.

BIBLIOTHECA BIBL. CHRISTIANEI ALTONENSIS

Inhalt:

1. Abhandlung des vierten Lehrers Dr. J. H. Scharenberg: Die Anwendung beliebig vieler Coordinaten in der analytischen Geometrie. Mit einer Figurentafel.
2. Jahresbericht des Directors.

Altona, 1859.

BIBLIOTHECA CHRISTIANEI ALTONENSIS

Die Anwendung beliebig vieler Coordinaten in der analytischen Geometrie.

1. Es kann als die Fundamentalaufgabe der analytischen Geometrie betrachtet werden, die Lage eines Punktes im Raume gegen einen anderen gegebenen Punkt festzustellen, denn alle geometrischen Gebilde sind vollkommen bestimmt, sobald jeder Punkt derselben gefunden werden kann. Diese Aufgabe kann man als gelöst ansehen, wenn eine Linie von dem gegebenen zu dem zu bestimmenden Punkte gezogen in allen ihren Theilen, sowohl der Richtung als der Länge nach, bestimmt ist, und es wird im Allgemeinen völlig gleichgültig sein, von welcher Art diese Linie sei, wenn nur die eben aufgestellte Bedingung erfüllt ist. Es ist aber natürlich, daß man, da die Wahl völlig freisteht, diejenige Linie wählt, welche selbst am einfachsten analytisch ausgedrückt, am leichtesten gemessen und deren Lage am leichtesten angegeben werden kann, nämlich die grade Linie. Um also die Lage eines Punktes in der Ebene zu bestimmen, verbinden wir ihn mit einem als fest angenommenen Punkte, durch welchen wir in dieser Ebene eine feste Linie gelegt haben, und bestimmen die Länge dieser Verbindungslinie und den Winkel, den sie mit der festen Axe macht; um seine Lage im Raume anzugeben, würden wir noch den Winkel hinzufügen müssen, den diese Ebene mit einer, durch die feste Axe gelegten, festen Ebene einschließt. In dem letzteren Falle kann man auch durch den als fest angenommenen Punkt drei feste Axen legen, die nicht in eine Ebene zusammenfallen, und die drei Winkel bestimmen, welche die durch den zu bestimmenden und den festen Punkt gehende Grade mit den drei Axen bildet. Aus diesen drei Winckeln und der Länge der Graden ergiebt sich die Lage des zu bestimmenden Punktes. Es ist dies das System der Polarcoordinaten. Häufiger noch wendet man das System paralleler Coordinaten an. Nachdem man durch einen festen Punkt O drei feste Axen OX, OY, OZ, im Raume angenommen und

durch dieselben drei feste Ebenen bestimmt hat, zieht man von dem zu bestimmenden Punkte drei Linien x, y, z parallel den drei Axen bis zu den drei Coordinatenebenen, oder, was dasselbe ist, von dem festen Punkte im Raume nach dem zu bestimmenden Punkte eine in zwei Punkten gebrochene Linie, deren Theile sich unter denselben Winkeln schneiden, wie die festen Axen. Ist nun die Länge dieser drei Linien x, y, z bestimmt, so ergiebt sich daraus mit Zuziehung der Winkel der Axen die Lage des Punktes. Sollen nun Linien, Flächen oder körperliche Räume durch analytische Ausdrücke bestimmt werden, so hat man aus den Gesetzen, nach welchen diese Raumgrößen gebildet sind, Gleichungen zwischen x, y und z abzuleiten, so daß durch je drei zusammengehörige Werthe von x, y und z ein Punkt, und durch alle möglichen Werthe derselben, welche die Gleichungen zulassen, auch alle Punkte jener räumlichen Gebilde bestimmt werden. Aus diesen Gleichungen lassen sich dann die Eigenschaften der räumlichen Gebilde durch analytische Untersuchungen meist mit derselben Leichtigkeit ableiten, wie durch geometrische Betrachtungen, ja sie führen oft zu ganz neuen Wahrheiten, welche geometrisch gar nicht nachweisbar sind. Andrerseits wird jeder Gleichung mit ein, zwei oder drei Veränderlichen eine geometrische Bedeutung beigelegt werden können, selbst wenn die Hülfsmittel der Analysis nicht ausreichen, dieselbe in allen Theilen zu bestimmen, und es ist dadurch die Geometrie für die Analysis eine Hülfswissenschaft geworden, wie es die Analysis für die Geometrie ist, denn grade diese geometrische Bedeutung giebt zur Lösung höherer Gleichungen ein wichtiges Hülfsmittel an die Hand.

2. Durch die beiden gebräuchlichen Coordinatensysteme kann also ein Punkt im Raume völlig bestimmt werden, und sie empfehlen sich namentlich durch ihre Einfachheit; allein bei ihrer Anwendung findet man bald, daß für eine große Zahl räumlicher Gebilde sich mit Hülfe derselben ein analytischer Ausdruck nicht finden läßt; theils weil die Systeme sich den Gesetzen, nach welchen jene Raumgrößen entstanden sind, nicht genug anschmiegen, theils weil sie auf Gleichungen führen, zu deren Lösung die Analysis keine Mittel bietet. Auch erscheint es als ein Mangel, daß diese Coordinatensysteme eine geometrische Deutung nur bei den Gleichungen zulassen, welche nicht mehr als drei veränderliche Größen enthalten, allen übrigen aber eine solche absprechen. Die Anwendung eines anderen Coordinatensystems wird daher in allen den Fällen gerechtfertigt erscheinen, wo dadurch diese Schwierigkeiten und Uebelstände ganz oder theilweise gehoben werden. Es scheint am angemessensten, die beiden besprochenen Coordinatensysteme gewissermaßen mit einander zu verbinden, indem man auch die Winkel, welche von den Coordinaten gebildet werden, veränderlich annimmt und die Zahl der Coordinaten nicht beschränkt. Es hat wohl zuerst Dr. Koch ein solches System aufgestellt, um mittelst desselben alle Gleichungen, auch beliebig vieler veränderlicher Größen geometrisch zu construiren. Die Behandlung einiger Aufgaben nach diesem System ist der Zweck dieser Blätter. Dasselbe ist im Wesentlichen Folgendes:

3. Jede gerade, gebrochene, krumme oder aus mehreren krummen Linien zusammengesetzte Linie, welche von einem festen Punkte O im Raume bis zu dem zu bestimmenden Punkte A reicht, nennen wir die Coordinatenlinie und bezeichnen die einzelnen Theile derselben, die Coordinaten, von dem zu bestimmenden Punkte ausgehend der Reihe nach mit z, y, x, w, u u. s. w.; die

Winkel, welche z mit y, y mit x, x mit w u. s. w. und die letzte Coordinate mit einer festen durch O gehenden Axe OX macht, der Reihe nach mit $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ u. s. w.; endlich die Winkel, welche die Ebene des Winkels $\mathfrak{z}$ mit der Ebene des Winkels $\mathfrak{y}$, die Ebene des Winkels $\mathfrak{y}$ mit der des Winkels $\mathfrak{x}$, die Ebene des Winkels $\mathfrak{x}$ mit der des Winkels $\mathfrak{w}$ u. s. w. und die Ebene des letzten jener Winkel mit einer festen durch die Axe OX gelegten Ebene macht, mit $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$ u. s. w. Man kann die sämmtlichen Coordinaten, die Winkel, welche sie einschließen und die Winkel ihrer Ebene oder auch nur einzelne derselben als veränderlich betrachten, auch kann man veränderliche Größen in die Gleichungen einführen, welche durch Coordinaten nicht repräsentirt sind, wie dies auch sonst wohl in der analytischen Geometrie geschieht. Unter dem Schnitt einer Constanten $x = c$ werden wir auch bei mehr als drei veränderlichen Größen das räumliche Gebilde verstehen, welches die Gleichungen ergeben, wenn wir in dieselben für die Veränderliche x den constanten Werth c einsetzen.

Wenden wir dieses System auf einige Beispiele an.

4. Ein Lichtstrahl, welcher von dem Punkte A (Fig. 1.) in gegebener Richtung ausgeht, wird von zwei gegebenen Ebenen reflectirt und trifft eine dritte gegebene Ebene; alle drei Ebenen sollen auf einer und derselben Ebene, hier der Ebene des Papiers, senkrecht stehen, so daß der Lichtstrahl immer in dieser Ebene bleibt. Es wird der Punkt gesucht, in welchem der Lichtstrahl die dritte Ebene trifft.

Legen wir durch A eine feste Axe AX in der Ebene des Papiers, und wählen wir die Bahn des Lichtstrahls selbst zur Coordinatenlinie, so wird diese eine gebrochene Linie sein, welche aus einem Theile mehr besteht, als reflectirende Ebenen da sind, und deren Theile auf den reflectirenden Ebenen selbst zusammenstoßen. Bezeichnen wir ferner die Neigungswinkel der drei Ebenen gegen die feste Axe bezüglich mit α, β, γ und die Entfernungen von A, in welchen sie die feste Axe schneiden, der Reihe nach mit a, a+b, a+b+c, so ergiebt sich zunächst $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$, weil der Lichtstrahl immer in derselben Ebene bleibt. Nach dem Reflectionsgesetz ist ferner Winkel AMB gleich NMR und Winkel MNR gleich ONS, und es ergiebt sich also:

$$1.\ \mathfrak{y} = 2\,\mathrm{AMB} = 2(\alpha - \mathfrak{x}) \quad \text{und} \quad 2.\ \mathfrak{z} = 2\,\mathrm{MNR} = 2(\mathrm{APC} - \mathfrak{y}) = 2(\beta - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})$$

Ferner ergiebt sich aus dem Dreieck APC

$$\mathrm{AP} = \frac{(a+b)\sin\beta}{\sin(\beta - \mathfrak{x})} \quad \text{und} \quad \mathrm{MP} = \frac{(a+b)\sin\beta}{\sin(\beta - \mathfrak{x})} - x,$$

und aus dem Dreieck ATD

$$\mathrm{AT} = \frac{(a+b+c)\sin\gamma}{\sin(\gamma - \mathfrak{x})} \quad \text{und} \quad \mathrm{MT} = \frac{(a+b+c)\sin\gamma}{\sin(\gamma - \mathfrak{x})} - x,$$

und aus dem Dreieck MQT

$$\mathrm{MQ} = \frac{\mathrm{MT}\sin(\gamma - \mathfrak{x})}{\sin(\gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})} = \frac{(a+b+c)\sin\gamma}{\sin(\gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})} - \frac{x\sin(\gamma - \mathfrak{x})}{\sin(\gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})}$$

$$\text{und} \quad \mathrm{NQ} = \frac{(a+b+c)\sin\gamma}{\sin(\gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})} - \frac{x\sin(\gamma - \mathfrak{x})}{\sin(\gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})} - y.$$

Nun ergiebt sich aus dem Dreieck AMB

3. $x = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha - \mathfrak{x})}$, und aus dem Dreieck MNP

4. $y = \frac{MP \sin(\beta - \mathfrak{x})}{\sin(\beta - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})} = \frac{(a+b) \sin \beta - x}{\sin(\beta - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})}$, und aus dem Dreieck NQO

5. $z = \frac{NQ\,(\sin \gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})}{\sin(\gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y} - \mathfrak{z})} = \frac{(a+b+c) \sin \gamma - x \sin(\gamma - \mathfrak{x}) - y \sin(\gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y})}{\sin(\gamma - \mathfrak{x} - \mathfrak{y} - \mathfrak{z})}$

Wenn $\mathfrak{x}$ bekannt ist, so ergeben sich $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ aus den Gleichungen 1. und 2. und x, y, z, der Reihe nach aus den Gleichungen 3. 4. 5. und der Punkt O ist somit bestimmt. Aus den Gleichungen 1. bis 5. ist das Gesetz ihrer Bildung leicht zu erkennen, so daß man zwei neue Gleichungen hinzufügen könnte, wenn sich die Zahl der reflectirenden Ebenen um eine vermehrte.

Wollte man die Lage des Punktes O durch zwei rechtwinklige Coordinaten X und Y bestimmen, so hätte man zur Zurückführung unserer Coordinaten auf zwei rechtwinklige folgende Gleichungen:

$$X = AG = AE + EF - FG \quad \text{und} \quad Y = GO = EM + HN + JO.$$

Die Werthe dieser 6 Linien ergeben sich aus den Dreiecken AME, MNH und NOJ, so daß man erhält

$$X = x \cos \mathfrak{x} + y \cos(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + z \cos(\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z})$$

$$\text{und} \quad Y = y \sin \mathfrak{x} + y \sin(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + z \sin(\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z}).$$

Aus diesen beiden und den oben gefundenen 5 Gleichungen hätte man $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, x, y, z zu eliminiren, was wohl nicht ausführbar ist. Es dürfte daher diese Aufgabe nach dem System paralleler Coordinaten nicht zu lösen sein.

5. Es wird die Bahn des Endpunktes D (Fig. 2.) eines Fadens gesucht, welcher auf einen Kreis von dem Radius r aufgewickelt ist und sich so abwickelt, daß der abgewickelte Theil immer gradlinig bleibt. Wählen wir als feste Ebene die des Kreises, als Anfangspunkt der Coordinatenlinie den Mittelpunkt A desselben und legen die feste Axe durch den Punkt der Peripherie, auf welchen der Punkt D zu liegen kommt, wenn der Faden ganz aufgewickelt ist, und als Coordinatenlinie eine gebrochene Linie, welche aus dem nach dem Berührungspunkt des Kreises und Fadens gezogenen Radius y und dem geradlinigen Theile z des Fadens besteht, so ist $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$ da die Coordinatenlinie in einer Ebene liegt, $AC = y = r$, Winkel $EAC = \mathfrak{y}$, $\angle ACD = \mathfrak{z} = 90^\circ$ und $CD = z$. Nun ist CD gleich dem Bogen CE, also gleich $\frac{\pi r \mathfrak{y}}{180}$. Wenn wir die Gleichungen, welche keine veränderliche Größen enthalten, nicht mitzählen, so ist die Curve durch die Gleichung $z = \frac{\pi r \mathfrak{y}}{180}$ bestimmt. Bezeichnet k die Länge des Bogens eines Kreises, welcher zu der Winkeleinheit und dem Radius 1 gehört, so ist der Bogen $EC = \mathfrak{y} r k$ und die Bestimmungsgleichung der Curve ist alsdann $z = r k \mathfrak{y}$.

6. Der Mittelpunkt eines Kreises gleite mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf einer graden Linie hin in der Weise, daß die Grade immer in der Ebene des Kreises bleibt; zugleich drehe sich der Kreis mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt,

und sein Radius wachse proportional der Entfernung von einem festen in der Graden liegenden Punkte. Es wird die Bahn eines Punktes in der Peripherie des Kreises gesucht. AX sei die Grade, auf welcher sich der Mittelpunkt bewegt, F die Lage desselben zu Anfang der Bewegung, D der Punkt in der Peripherie, dessen Bahn wir verfolgen, E die ursprüngliche Lage desselben und C der Durchschnitt der Geraden mit dem Kreise. Wir wählen als Coordinatenlinie die gebrochene Linie, die aus der Graden FB und dem Radius BD zusammengesetzt ist, es ist also $FB = y$, $BD = z$. Ist nun der Radius BD immer m-mal größer als der Abstand des Mittelpunkts vom Punkte A, und ist die Linie $AF = a$, so hat man $z = m(y + a)$. Dreht sich ferner der Kreis in derselben Zeit um den Winkel α, in welcher der Mittelpunkt eine Längeneinheit zurücklegt, so ist $\mathfrak{z} = y\alpha$. Es ist endlich $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$. Die beiden Gleichungen

$$1.\ z = m(y + a) \quad \text{und} \quad 2.\ \mathfrak{z} = y\alpha$$

bestimmen also die Curven. Zu jedem Werthe von y ergiebt sich aus 2. der entsprechende Werth von $\mathfrak{z}$ und aus 1. der von z. In Fig. 3 ist die Curve construirt für $a = 2$, $m = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ$.

7. Auf der Peripherie eines festen Kreises von dem Radius R rolle ein Kreis von dem Radius r fort; dabei soll die Ebene des bewegten Kreises einen constanten Winkel α mit der des festen Kreises machen, während die Durchschnittslinie der Ebenen beider Kreise stets mit der Tangente an den festen Kreis zusammenfällt. Es wird die Bahn eines Punktes in der Peripherie des bewegten Kreises gesucht.

Legen wir den Anfangspunkt der Coordinatenlinie in den Mittelpunkt A (Fig. 4.) des festen Kreises und führen sie von da durch den Berührungspunkt B der beiden Kreise und durch den Mittelpunkt C des rotirenden Kreises nach dem Punkte D, dessen Bahn wir suchen, und legen wir die feste Axe durch den Punkt E in der Peripherie des festen Kreises, auf welchen der Punkt D zu liegen kommt, so ist $BA = x = R$, $EAB = \mathfrak{x}$, $BC = y = r$, $FBC = \mathfrak{y} = \alpha$, $CD = z = r$, $BCD = \mathfrak{z}$, $\mathfrak{X} = 0$, $\mathfrak{Y} = 90^\circ$, $\mathfrak{Z} = 90^\circ$. Veränderlich sind nur die Winkel $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ und da die Bogen EB und ED von gleicher Länge sind, so ist also $R\mathfrak{x} = r\mathfrak{z}$, durch welche Gleichung die Curve bestimmt ist.

8. Auf der Peripherie eines festen Kreises von dem Radius R bewegt sich der Mittelpunkt eines Kreises so, daß seine Ebene immer senkrecht auf der Ebene des festen Kreises steht, und die Durchschnittslinie der Ebenen derselben mit dem Radius des festen Kreises zusammenfällt. Auch soll der Radius des bewegten Kreises veränderlich und zwar dem absolut genommenen Sinus des Winkels proportional sein, um welchen sich dieser Kreis bereits gedreht hat. Wir suchen die Oberfläche des von dem Kreise beschriebenen Körpers. Wählen wir als Anfangspunkt der Coordinatenlinie den Mittelpunkt A (Fig. 5.) des festen Kreises und als Coordinatenlinie die gebrochene Linie ABCDE, welche aus den rechtwinkligen Coordinaten w und x des festen Kreises und den rechtwinkligen Coordinaten y und z des bewegten Kreises besteht, und zwar so, daß y in die Ebene des festen Kreises fällt, und lassen die feste Axe mit w und die feste Ebene mit der

des festen Kreises zusammenfallen; so ergiebt sich $\mathfrak{W} = \mathfrak{w} = \mathfrak{X} = 0$, $\mathfrak{x} = 90^\circ$, $\mathfrak{Y} = 0$, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{z} = 90^\circ$. Der Winkel $\mathfrak{y}$, d. i. der Winkel FCD ist gleich Winkel ACB, also 1. $\cos \mathfrak{y} = \frac{x}{R}$. Der Radius des bewegten Kreises ist $n \sin CAB = n \cos \mathfrak{y} = n \frac{x}{R}$. Zwischen den 4 Theilen der Coordinatenlinie finden folgende Gleichungen statt: 2. $w^2 + x^2 = R^2$ und 3. $y^2 + z^2 = \frac{n^2 x^2}{R^2}$. In diesen Gleichungen finden sich 5 veränderliche Größen, nämlich $\mathfrak{y}$, w, x, y, z, welche durch die Gleichungen 1., 2., 3. bestimmt sind. Um die einzelnen Punkte der Oberfläche zu finden, haben wir dem w alle möglichen Werthe zu ertheilen, welche zwischen $+R$ und $-R$ liegen; wir erhalten dann aus der Gleichung 2. alle dazugehörigen Werthe von x, welche in die Gleichung 1. substituirt alle entsprechenden Werthe von $\mathfrak{y}$ ergeben. Werden die Werthe von x auch in 3. substituirt, und ertheilt man dann dem y alle Werthe, die zwischen $+\frac{nx}{R}$ und $-\frac{nx}{R}$ liegen, so erhält man aus der Gleichung 3. alle Werthe von z.

9. Die vorstehenden Beispiele zeigen, daß namentlich solche Curven und Oberflächen, die durch die Bewegung einer Figur um eine andere entstehen, sich mittelst unserer Coordinaten durch sehr einfache Gleichungen ausdrücken lassen, weil man unter den unzähligen, möglichen Coordinatenlinien immer eine solche wird auswählen können, welche auf einfache Gleichungen führt.

Verbinden wir die Gleichung 1. $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ mit der Gleichung 2. $z = cx$ und beziehen dieselben auf rechtwinklige, parallele Coordinaten. Die erste Gleichung ist die der Lemniscate und die zweite Gleichung fordert, daß in jedem Punkte dieser Linie eine Senkrechte auf die Ebene derselben errichtet werde, welche c mal größer ist als x. Errichten wir in zwei zu einem Werthe von x gehörenden Punkten A und B (Fig. 6.) der Lemniscate und in dem Endpunkte von x Lothe und machen sie gleich cx, so liegen die Endpunkte derselben in einer der Ordinate y parallelen, graden Linie, und die Endpunkte aller der Lothe, die in den Endpunkten aller Abcissen errichtet und gleich cx gemacht werden, liegen in einer Geraden MN, die mit der Axe MX einen Winkel α macht, so daß $tg\,\alpha = \frac{z}{x} = \frac{cx}{x} = c$ ist, und da alle Graden, welche zwei zu demselben Werthe von x gehörigen Punkte der Lemniscate verbinden, unter sich parallel sind und die Gerade MN schneiden, so liegt also die durch die beiden Gleichungen ausgedrückte Curve in einer Ebene. Verlegen wir die Axe in diese Ebene, so muß sich die Curve durch zwei rechtwinklige Coordinaten bestimmen lassen. Legen wir die Axe durch M und den Endpunkt eines in einem Endpunkte von x errichteten Lothes, und bezeichnen wir die beiden neuen, rechtwinkligen Coordinaten mit X und Y, so ist $X = x \cos \alpha$ und $Y = y$. Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir aus den gegebenen Gleichungen

$$3.\ \left(\frac{X^2}{\cos^2 \alpha} + Y^2\right)^2 = 2c\left(\frac{X^2}{\cos^2 \alpha} - Y^2\right).$$

Würde nun in dieser Gleichung auch α als veränderlich betrachtet, und ertheilte man demselben alle Werthe zwischen -90° und $+90^\circ$, so ergäbe unsere Gleichung alle Punkte, welche senkrecht über oder unter den Punkten der Lemniscate ABC liegen. Die Gleichung 3. drückt

also die Oberfläche eines graden Cylinders aus, dessen Basis die durch die Gleichung 1. bestimmte Lemniscate ist. Jeder Schnitt der Constanten $\alpha = \alpha'$ ergiebt alle Punkte senkrecht über den Punkten der Lemniscate in einer Ebene, welche die Ebene der Axen XY im Anfangspunkt der Coordinaten unter dem Winkel α' schneidet und senkrecht auf der Ebene der XZ steht. Wenden wir unsere Coordinaten an, indem wir BMX als feste Ebene, MM als feste Axe wählen und MB mit y und BE mit z bezeichnen; so ist $\mathfrak{Y} = 0$, $\mathfrak{Z} = 90°$, $\mathfrak{z} = 90°$, und zwischen den Veränderlichen y, z und $\mathfrak{y}$ ergeben sich die Gleichungen

$$4.\ y^2 = 2c^2 \cos 2\mathfrak{y} \quad \text{und} \quad 5.\ c\,y \cos \mathfrak{y}$$

als Gleichungen unseres Cylinders.

Verbinden wir dagegen die Gleichung $y^2 = 2c^2 \cos . 2\mathfrak{y}$ mit der Gleichung $\sin \mathfrak{Y} = \sqrt{1-\lambda^2}$, in welcher λ eine veränderliche Größe ist, welche durch eine Coordinate nicht repräsentirt ist, und der man daher alle Werthe zu ertheilen hat, welche $\sin \mathfrak{Y}$ reell machen; so stellen diese Gleichungen den Rotationskörper dar, den man erhält, wenn man die Lemniscate um ihre Axe dreht. Alle Schnitte, die zu constanten Werthen von λ gehören, sind congruente Lemniscaten. Die Werthe von λ liegen sämmtlich zwischen $+1$ und -1, also die Werthe von $\sin \mathfrak{Y}$ auch zwischen $+1$ und -1. $\mathfrak{Y}$ kann also alle möglichen Werthe annehmen.

10. Werden von einem Punkte C (Fig. 7.) außerhalb einer Graden BH beliebige grade Linien CD, Cd nach HB gezogen und von den Durchschnittspunkten D, d auf denselben Stücke DF, DE, df, de abgetragen, welche sämmtlich einer gegebenen Graden c gleich sind; so soll der geometrische Ort der Endpunkte F, E, f, e dieser Linien gefunden werden.

Ist CA senkrecht auf HB und gleich a, A der Anfangspunkt der Coordinaten, AD = y, DE = z, die feste Axe mit AB zusammenfallend, also $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = \mathrm{BDE}$ und $z = c$, so ist

$$1.\ \cot g . \mathfrak{z} = -\frac{y}{a}.$$

Durch diese Gleichung, in der $\mathfrak{z}$ und y veränderlich sind, ist jeder Punkt der Curve bestimmt und leicht aufzufinden. Zu jedem beliebig angenommenen Werthe von y ergiebt die Gleichung 1. zwei Werthe von $\mathfrak{z}$. Um diese Gleichung auf rechtwinklige Coordinaten X und Y zurückzuführen, haben wir die Formeln

$$2.\ X = y + c \cos \mathfrak{z} \quad \text{und} \quad 3.\ Y = c \sin \mathfrak{z}.$$

Aus 3. folgt $\sin \mathfrak{z} = \frac{Y}{c}$, also $\cos . \mathfrak{z} = \frac{\sqrt{c^2 - Y^2}}{c}$ und $\cot g . \mathfrak{z} = \frac{\sqrt{c^2 - Y^2}}{Y}$. Werden diese Werthe nebst dem Werthe von y aus 1. in 2. substituirt, so erhält man die Gleichung der Curve

$$4.\ X^2 Y^2 = (Y - a)^2 (c^2 - Y^2)$$

eine Gleichung vom vierten Grade. Untersuchen wir an diesem Beispiele den Lauf der Curve. Die Untersuchung hat nichts Eigenthümliches, so lange die Winkel, unter denen die Coordinaten zusammenstoßen, constant angenommen werden; aber auch wenn die Winkel veränderlich sind, ergeben sich nicht viel größere Schwierigkeiten, als bei rechtwinkligen Coordinaten.

Zu jedem Werthe von y ergeben sich zwei Werthe von $\mathfrak{z}$ aus der Gleichung 1., welche um 180° verschieden sind, die beiden zu gleichen Werthen von y gehörigen Punkte der Curve liegen also zu beiden Seiten der festen Axe aber im Allgemeinen in verschiedenen Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten. Auch durchschneidet die Curve die feste Axe nicht, weil sonst $\mathfrak{z} = 0$ und also $y = \infty$ werden müßte. Die Curve besteht also aus zwei nicht zusammenhängenden Zügen zu beiden Seiten der Axe, welche nach beiden Seiten ins Unendliche fortlaufen. Der Abstand der einzelnen Punkte von der festen Axe ist gleich $c \sin \mathfrak{z}$, er ist also am größten nämlich gleich $\pm c$ für $\mathfrak{z} = 90$, also für $y = 0$. Die Punkte der Curve, welche am weitesten von der Axe entfernt sind, liegen also in einer im Anfangspunkt der Axe auf diese errichteten Senkrechten KJ. Der Abstand wird um so kleiner, je kleiner $\mathfrak{z}$ wird, und da $\mathfrak{z}$ abnimmt, wenn y wächst, so wird derselbe um so kleiner, je größer y wird und verschwindet für unendlich große positive oder negative Werthe von y. Die Curve nähert sich also auf beiden Seiten immer mehr der festen Axe, je weiter sie sich vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernt; diese ist also für alle vier Aeste der Curve eine Asymtote.

Der Abstand eines Punktes der Curve von der im Anfangspunkt der Coordinaten auf die feste Axe errichteten Senkrechten ist gleich $y + c \cos \mathfrak{z}$. Verwandelt man y in der Gleichung 1. in $-y$, so ändert auch $\cot g\, \mathfrak{z}$ das Vorzeichen. Zu $-\cot g . \mathfrak{z}$ gehören die Werthe $-\mathfrak{z}$ und $180-\mathfrak{z}$, zu $+\cot g\, \mathfrak{z}$ die Werthe $\mathfrak{z}$ und $-(180-\mathfrak{z})$. Von diesen vier Werthen müssen $-\mathfrak{z}$ und $-(180-\mathfrak{z})$ zu dem einen und $\mathfrak{z}$ und $180-\mathfrak{z}$ zu dem andern Zuge der Curve gehören. Wird daher $-y$ statt y gesetzt, so geht in dem Ausdruck $y + c \cos \mathfrak{z}$ $\mathfrak{z}$ in $180-\mathfrak{z}$, und $\cos . \mathfrak{z}$ in $-\cos . \mathfrak{z}$ über, derselbe ist also für ein negatives y folgender $-(y + c \cos \mathfrak{z})$. Zwei Punkte, die zu gleichen aber entgegengesetzten Werthen von y gehören, haben also immer gleichen Abstand von der Senkrechten AK, wenn sie in demselben Zuge der Curve liegen und, wie eine ganz ähnliche Betrachtung zeigt, auch von der Axe AB; die Senkrechte AK theilt also die Curve in zwei congruente Hälften.

Wird der Abstand von der Senkrechten gleich 0 gesetzt, so findet man die Punkte, in welchen die Curve dieselbe schneidet. Man erhält

$$y + c \cos \mathfrak{z} = -a \cot g\, \mathfrak{z} + c \cos \mathfrak{y} = 0$$

$$\text{oder} \quad c . \cos \mathfrak{z} \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{z}} + a \cos \mathfrak{z} = 0$$

Dieser Gleichung genügen die Werthe $\cos \mathfrak{z} = 0$ und $\sin \mathfrak{z} = \frac{a}{c}$. Für diese Werthe von $\mathfrak{z}$ wird $y = 0$ und $y = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$, welcher Werth nur reell ist, wenn $a > c$ ist. Die Curve durchschneidet also die Senkrechte zweimal, wenn $a < c$ ist und zwar in den Punkten, die am weitesten von der Axe entfernt sind, oder viermal, wenn $a > c$ ist. In dem letzteren Falle treffen jedoch zwei Durchschnittspunkte in dem Punkte C zusammen und bilden hier einen Knoten, da für $\sin \mathfrak{z} = \frac{a}{c}$ die Gleichung 3. ergiebt $Y = a$.

Suchen wir endlich noch die Punkte, wo die Tangente an die Curve der Axe parallel oder auf ihr senkrecht ist. Die Gleichungen 2. und 3. geben differenzirt

$$\frac{dX}{d\mathfrak{z}} = c \cos \mathfrak{z} \quad \text{und} \quad \frac{dY}{d\mathfrak{z}} = \frac{a}{\sin^2 \mathfrak{z}} - c \sin \mathfrak{z};$$

ist also der Winkel, den die Tangente mit der Axe bildet α, so hat man

$$tg\,\alpha = \frac{dY}{dX} = \frac{c\,cos\,\mathfrak{z}\,sin^2\mathfrak{z}}{a - c\,sin^3\mathfrak{z}}.$$

Die an einen Punkt der Curve gezogene Tangente wird also der Axe parallel, wenn $c\,cos\,\mathfrak{z}\,sin^2\mathfrak{z} = 0$, also für $cos.\mathfrak{z} = 0$ und für $sin\,\mathfrak{z} = 0$, mithin in den Punkten des größten und kleinsten Abstandes von der Axe; sie steht auf der Axe senkrecht, wenn $a - c\,sin^3\mathfrak{z} = 0$ also $sin\,\mathfrak{z} = \sqrt[3]{\frac{a}{c}}$. Für diesen Werth ist $y = -a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}}$ und $X^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}$ und $Y = c^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}$. Wenn daher $c > a$ ist, so hat die Curve zwei Punkte, deren Tangenten senkrecht auf der Axe stehen, ist aber $c < a$, so giebt es keine auf der Axe senkrechte Tangente.

11. In dem Kreise um C (Fig. 8.) werden von A aus Sehnen AD, AB gezogen und nach beiden Seiten verlängert, so daß die Verlängerungen von D und B aus gerechnet dem Durchmesser AB gleich sind. Man sucht den geometrischen Ort der Endpunkte E, F, G, A der Verlängerungen.

Nehmen wir den Durchmesser AB als feste Axe und ADE als Coordinatenlinie, so daß $AD = y$ und $DE = z$ ist, so ist $cos\,\mathfrak{z} = \pm 1$, $z = AB = 2r$, y aber und $\mathfrak{y}$ sind veränderlich. Aus dem Dreieck ABD ergiebt sich

$$1.\quad cos\,\mathfrak{y} = \frac{y}{2r},$$

durch welche Gleichung die Curve in Beziehung auf das Coordinatensystem $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$, $cos\,\mathfrak{z} = \pm 1$, $z = 2r$ bestimmt ist. Zu jedem Werthe von $\mathfrak{y}$ gehören ein Werth von y und 2 Punkte der Curve, weil $\mathfrak{z}$ immer 2 Werthe hat, y aber kann nicht größer werden als 2r, die Curve ist also geschlossen und läuft in sich zurück. Sie schneidet die Axe, wenn $\mathfrak{y} = 0$ wird, also für $y = 2r$, zugleich hat y dann seinen größten Werth, und da die Entfernung der einzelnen Punkte der Curve vom Anfangspunkte der Coordinaten immer gleich $y \pm z$ ist, so haben die zu diesem Werthe von y gehörigen Punkte der Curve bezüglich die größte und die geringste Entfernung von jenem Punkte, nämlich 0 und 4r.

Werden dem $\mathfrak{y}$ gleiche aber entgegengesetzte Werthe ertheilt, so behält y seinen Werth, weil $cos\,(-\mathfrak{y}) = cos\,\mathfrak{y}$ ist, die Curve wird also durch die Axe in zwei congruente Theile getheilt. Die Lage der Tangente ergiebt sich durch Differenziation der Gleichungen, welche zur Einführung rechtwinkliger Coordinaten X und Y dienen, nämlich

$$2.\quad X = y\,cos\,\mathfrak{y} \pm 2r\,cos\,\mathfrak{y} = 2r\,cos\,\mathfrak{y}\,(cos\,\mathfrak{y} \pm 1) \text{ und}$$

$$3.\quad Y = y\,sin\,\mathfrak{y} \pm 2r\,sin\,\mathfrak{y} = 2r\,sin\,\mathfrak{y}\,(cos\,\mathfrak{y} \pm 1). \text{ Man erhält}$$

$$4.\quad \frac{dX}{d\mathfrak{y}} = -2r\,sin\,\mathfrak{y}\,(2\,cos\,\mathfrak{y} \pm 1) \text{ und}$$

$$5.\quad \frac{dY}{dy} = 2r\,(2\,cos^2\mathfrak{y} \pm cos\,\mathfrak{y} - 1).$$

Wenn man also den Winkel der Tangente mit der Axe mit α bezeichnet, so ist

$$6.\quad tg\,\alpha = \frac{dY}{dX} = \frac{2\,cos^2\mathfrak{y} \pm cos\,\mathfrak{y} - 1}{sin\,\mathfrak{y}\,(2\,cos\,\mathfrak{y} \pm 1)}.$$

Die Tangente wird also der Axe parallel, wenn $2\cos^2\mathfrak{y} \pm \cos\mathfrak{y} - 1 = 0$ wird, also für $\cos\mathfrak{y} = \pm\frac{1}{2}$ und für $\cos\mathfrak{y} = \mp 1$, oder für $\mathfrak{y} = \pm 60^\circ$, $\mathfrak{y} = \pm 120^\circ$, $\mathfrak{y} = 0$ und $\mathfrak{y} = 180^\circ$. Durch diese Werthe sind jedoch nur drei Punkte der Curve bestimmt, da man dieselben Punkte erhält, wenn man für $\mathfrak{y}$ $+60^\circ$ oder -120°, -60° oder $+120^\circ$, 0° oder 180° setzt. In den Gleichungen 2. bis 6. gelten die oberen Vorzeichen für die Werthe $\cos\mathfrak{z} = +1$ und die unteren für $\cos\mathfrak{z} = -1$. Es entspricht somit den Werthen $\pm 60^\circ$ und 180° der Werth $\mathfrak{z} = 0$ und den Werthen $\pm 120^\circ$ und 0° der Werth $\mathfrak{z} = 180^\circ$. Die Tangente ist also der Axe parallel 1) in den Punkten E und H, wo $\mathfrak{y} = \pm 60$, $\mathfrak{z} = 0$, $y = r$, $X = \frac{3}{2}r$ und $Y = \frac{3}{2}r\sqrt{3}$, und 2) im Punkte A, wo $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = 180$, $y = 2r$, $X = 0$ und $Y = 0$ ist.

Die Tangente steht auf der Axe senkrecht, wenn $\sin\mathfrak{y}\,(2\cos\mathfrak{y} \pm 1) = 0$ ist, also für $\sin\mathfrak{y} = 0$ und für $\cos\mathfrak{y} = \mp\frac{1}{2}$. Es ergeben sich für diese Punkte also folgende Werthe:

$$\begin{array}{llllll} 1. & \mathfrak{y} = 0^\circ, & y = 2r, & X = 4r, & Y = 0, & \mathfrak{z} = 0^\circ \text{ und} \\ & \mathfrak{y} = 60^\circ, & \mathfrak{y} = r, & X = -\frac{1}{2}r, & Y = -\frac{1}{2}r\sqrt{3}, & \mathfrak{z} = 180^\circ \text{ und} \\ & \mathfrak{y} = 120^\circ, & y = -r, & X = -\frac{1}{2}r, & Y = \frac{1}{2}r\sqrt{3}, & \mathfrak{z} = 0^\circ. \end{array}$$

Die drei anderen Werthe von $\mathfrak{y}$, nämlich 180°, -60°, -120° ergeben dieselben Punkte der Curve. Eliminirte man aus den Gleichungen 1. bis 3. die Veränderlichen y und $\mathfrak{y}$, so erhielte man eine Gleichung vom vierten Grade zwischen X und Y.

12. Es ist eine gerade Linie AB (Fig. 9.) und in ihr ein Punkt A und außerhalb derselben ein Punkt D gegeben. Von D wird eine beliebige Grade DE gezogen, welche AB in E schneidet, in E wird EG senkrecht auf DE errichtet und von A ein Loth auf EG gefällt. Man sucht den geometrischen Ort des Fußpunktes dieses Lothes.

Der Abstand DB des Punktes D von AB sei gleich b und AB gleich a. Wählte man A als Anfangspunkt, AB als feste Axe und AG als Coordinatenlinie, so hätten wir die gebräuchlichen Polarcoordinaten; es sei daher DB die feste Axe und D der Anfangspunkt der Coordinatenlinie DEG, also $DE = y$, $EG = z$, $EDB = \mathfrak{y}$ und $DEG = \mathfrak{z} = 90$. Aus dem Dreieck DEB ergiebt sich $y = \frac{b}{\cos\mathfrak{y}}$ und $EB = b\,tg\,\mathfrak{y}$ und aus dem Dreieck AGE $z = AE\cos.\mathfrak{y} = (a - EB)\cos\mathfrak{y} = a\cos\mathfrak{y} - b\sin\mathfrak{y}$. Die Curve ist also bestimmt durch die Gleichungen

$$1.\quad y = \frac{b}{\cos\mathfrak{y}} \qquad \text{und} \qquad 2.\quad z = a\cos\mathfrak{y} - b\sin\mathfrak{y}.$$

Für $\mathfrak{y} = 0$ ist $y = b$ und $z = a$, die Curve schneidet also die Grade AB im Punkte A; je mehr der positive oder negative Werth von $\mathfrak{y}$ wächst und sich 90° nähert, um so mehr wächst auch y und zwar ins Unendliche, z aber erhält nur positive Werthe, so lange $a\cos.\mathfrak{y} > b\sin\mathfrak{y}$, d. h. so lange $tg\,\mathfrak{y} < \frac{a}{b}$. Die Curve liegt also mit dem Punkte D auf derselben Seite der gegebenen Graden für alle Werthe von $\mathfrak{y}$ zwischen $tg\,\mathfrak{y} = 0$ und $tg\,\mathfrak{y} = \frac{a}{b}$, für alle negativen Werthe von $\mathfrak{y}$ und für die, für welche $tg\,\mathfrak{y} > \frac{a}{b}$, auf der entgegengesetzten Seite. Der Abstand der Punkte der Curve von der Axe ist

$$3.\quad y \sin \psi + z \cos \psi = \frac{b \sin^3 \psi + a \cos^3 \psi}{\cos \psi}.$$

Derselbe wird gleich a sowohl für $\psi = 0$ als auch für $tg\,\psi = \frac{a}{b}$, die beiden Durchschnittspuncte der Curve mit der Graden AB fallen also in einen Punkt zusammen und die Curve bildet hier einen Knoten. Da der Abstand ins Unendliche wächst, wenn ψ sich $\pm 90^\circ$ nähert, so läuft die Curve mit zwei Schenkeln nach entgegengesetzten Seiten ins Unendliche. Die Entfernung unserer Linie von der Graden AB, nämlich

$$4.\quad z \sin \psi = a \cos \psi \sin \psi - b \sin^2 \psi$$

wird für $\psi = \pm 90^\circ$ gleich $-b$, die beiden unendlichen Schenkel der Curve nähern sich also immer mehr einer Graden, welche AB parallel ist und von ihr um b absteht. Dieser Abstand wird ein Maximum, wenn der Differenzialquotient desselben verschwindet, also für

$$5.\quad a \cos^2 \psi - a \sin^2 \psi - 2\,b \sin \psi \cos \psi = 0.$$

Daraus ergiebt sich $tg\,2\psi = \frac{a}{b}$. Gehört zu diesem Werthe der positive Winkel $\psi = \alpha$, so gehört auch noch der zweite Werth $\psi = -(90-\alpha)$ dazu, und man findet also den höchsten und tiefsten Punkt der Curve, wenn man den Winkel ADB halbirt, in den Endpunkten der Halbirenden die Lothe FH und DG errichtet und GK auf DG senkrecht zieht. Es treffen alsdann FH und GK die Curve in den gesuchten Punkten, in welchen zugleich die Tangenten an die Curve der Graden AB parallel werden.

13. Man zieht von einem Punkte C (Fig. 10.) außerhalb einer Graden AB beliebige grade Linien nach derselben, errichtet in den Endpunkten D Lothe FE darauf und macht FD = DE = AD. Es wird der geometrische Ort der Punkte F und E gesucht.

Wir bezeichnen die Entfernung CA des Punktes C von der gegebenen Graden AB mit a, wählen AB als Axe und ADF als Coordinatenlinie, so ist AD = y, DF = z, $\psi = 0$ und BDF = ζ. Nun ist Winkel BDF = DCA und folglich

$$1.\quad tg\,\zeta = \frac{y}{a} \quad \text{und} \quad 2.\quad z = y.$$

Diese beiden Gleichungen, in welchen y, z und ζ veränderlich sind, bestimmen die Curve. Die Abstände der Punkte von der Axe und von der im Anfangspunkte derselben errichteten Senkrechten sind bezüglich

$$3.\quad y \sin \zeta \quad \text{und} \quad 4.\quad 2\,y \cos^2 \frac{\zeta}{2}.$$

Zu jedem Werthe y′ von y gehören zwei Werthe ζ' und $-(180-\zeta')$ von ζ, mithin zwei Punkte der Curve, welche auf derselben Seite der Senkrechten AC liegen, da der Abstand von dieser Linie zufolge 4. für ein positives y nicht negativ und für ein negatives y nicht positiv werden kann. Zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe von y ergeben also vier Punkte F, E, G, H der Curve, von welchen immer zwei, F und G, E und H, für welche $\sin \zeta$ denselben Werth hat, gleichen aber entgegengesetzten Abstand sowohl von der Axe AB als von der Senkrechten AD haben. Die

Senkrechte theilt also die Curve in zwei congruente Hälften. Für $y = 0$ ist auch $z = 0$ und $\mathfrak{z} = 0$, es gehen daher beide Theile der Curve durch den Anfangspunkt A der Coordinatenlinie, und da sich $\mathfrak{z}$ um so mehr $\pm 90^\circ$ nähert, je größer $\pm y$ also auch $\pm z$ wird, so wachsen die Abstände 3. und 4. mit zunehmendem $\pm y$ ins Unendliche, die Curve hat also vier ins Unendliche fortlaufende Aeste, welche sich immer weiter von AB und AC entfernen. Um die Richtungen zu finden, denen sich diese Aeste immer mehr nähern, hätte man in dem Ausdrucke für $\frac{dY}{dX}$, $\mathfrak{z} = \pm\infty$ also $\mathfrak{z} = \pm 90^\circ$ zu setzen, wo X und Y rechtwinklige Coordinaten bedeuten, die sich aus den Gleichungen

$$5.\quad X = y \pm y \cos \mathfrak{z} = a\, tg\, \mathfrak{z}\,(1 \pm \cos \mathfrak{z}) \quad \text{und}$$

$$6.\quad Y = \pm y \sin \mathfrak{z} = \pm a\, tg\, \mathfrak{z} \sin \mathfrak{z}$$

ergeben. Man hat zunächst, wenn α der Winkel ist, welchen die Tangente mit der Axe bildet

$$7.\quad tg\, \alpha = \frac{dY}{dX} = \frac{\sin \mathfrak{z} \cos^2 \mathfrak{z} \pm \sin \mathfrak{z}}{1 \pm \cos^3 \mathfrak{z}},$$

und also für $\mathfrak{z} = 90^\circ$

$$tg\, \alpha = \pm 1 \quad \text{also} \quad \alpha = \pm 45^\circ.$$

Die vier Aeste der Curve schließen sich also immer mehr an zwei grade Linien an, welche auf einander senkrecht stehen und mit der Axe Winkel von 45° einschließen. Die Gleichung 7. zeigt auch, daß für $\mathfrak{z} = 0$ die Tangente der Axe parallel und auch auf der Axe senkrecht wird. Für den Bogen FAG ist nämlich in A die Axe selbst Tangente, und die Aeste AE und AH haben in A eine gemeinschaftliche auf der Axe senkrechte Tangente.

14. Aus den vorhergehenden Beispielen dürfte hervorgehen, daß unsere Coordinaten auf einfachere Gleichungen führen, als rechtwinklige, ja daß sie für viele Linien und Flächen analytische Ausdrücke geben, für welche sich in rechtwinkligen Coordinaten lösbare Gleichungen nicht aufstellen lassen. In die letztere Klasse gehören auch in sich zurücklaufende Linien, welche aus geradlinigen Theilen zusammengesetzt sind. Sollte z. B. der Umfang eines regulären Vielecks von n Seiten, dessen kleiner Halbmesser gleich a ist, analytisch ausgedrückt werden, so wähle man die Mitte desselben als Anfangspunkt der Coordinatenlinie die Linie nach der Mitte einer Seite als Axe und fälle nun vom Mittelpunkt auf sämmtliche Seiten Lothe, so sind diese einander gleich und je zwei neben einander liegende schließen den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ ein, mit der Axe aber bilden sie die Winkel $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots \frac{2(n-1)\pi}{n}$. Wählt man also die Linie ACJ (Fig. 11.) als Coordinatenlinie, so ist $XAC = \mathfrak{y}$, $AC = y = a$, $\mathfrak{z} = \pm 90^\circ$ und $CJ = z$. Um nun $\mathfrak{y}$ so zu bestimmen, daß y alle die Lagen AB, AC, AD u. s. w. und nur diese Lagen annehmen könne, haben wir eine Gleichung vom n^{ten} Grade zu bilden, deren Wurzeln die Winkel $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}$ u. s. w. sind, also

$$1.\quad \mathfrak{y}\left(\mathfrak{y} - \frac{2\pi}{n}\right)\left(\mathfrak{y} - \frac{4\pi}{n}\right)\left(\mathfrak{y} - \frac{6\pi}{n}\right) \ldots \left(\mathfrak{y} - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

Die halbe Vielecksseite ist gleich $a\,tg\frac{\pi}{n}$, für z muß also eine Gleichung aufgestellt werden welche alle Werthe zwischen $-a\,tg\frac{\pi}{n}$ und $+a\,tg\frac{\pi}{n}$ zuläßt, alle andern aber ausschließt. Dieser Forderung genügt die Gleichung

$$2.\quad z = \sqrt{a^2 tg^2 \frac{\pi}{n} - \lambda^2},$$

wo λ eine veränderliche Größe vorstellt, welche durch eine Coordinate nicht repräsentirt ist, und der man alle Werthe zu ertheilen hat, welche z nicht imaginär machen. Es liegen alle diese Werthe zwischen 0 und $a\,tg\frac{\pi}{n}$ und folglich die Werthe von z zwischen $+a\,tg\frac{\pi}{n}$ und $-a\,tg\frac{\pi}{n}$. Die Gleichungen 1. und 2. stellen also den Umfang des regulären Vielecks von n Seiten dar.

Wenn wir unter den Coordinaten unseres Vielecks auch y als veränderlich betrachten und so durch eine Gleichung bestimmen, daß es jeden Werth zwischen 0 und a annehmen kann, so würde dann die ganze Fläche des Vielecks ausgedrückt. Zu diesem Zwecke haben wir die Gleichung $y = a$ durch folgende zu ersetzen

$$3.\quad \delta = \sqrt{y(a-y)}$$

in welcher δ ebenfalls veränderlich und durch eine Coordinate nicht repräsentirt ist. Soll δ nicht imaginär werden, so darf y weder negativ noch größer als a sein. Ersetzen wir dann in der Gleichung 2. noch a^2 durch y^2, so drücken die Gleichungen 1. 2. 3. die Fläche des regulären Vielecks von n Seiten und dem kleinen Radius a aus. Jeder Schnitt der Constanten $\delta = \delta'$ ergiebt ein reguläres Vieleck von n Seiten und dem kleinen Halbmesser $y' = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \delta'^2}$. Dieses Vieleck erweitert sich, indem es sich immer ähnlich bleibt, wenn δ kleiner wird, bis sein kleiner Halbmesser gleich a wird und dabei beschreibt sein Umfang die Fläche des Vielecks.

Die Einführung solcher nicht durch Coordinaten repräsentirter Veränderlichen giebt auch ein Mittel an die Hand, begrenzte Theile einer Curve darzustellen. Verbindet man z. B. die Gleichung der Parabel für rechtwinklige Coordinaten $z^2 = py$ mit der Gleichung $\lambda = \sqrt{(y-a)(b-y)}$, in welcher λ veränderlich ist und nicht imaginär werden darf, so sind, dieser Gleichung zufolge, nur solche Werthe von y möglich, welche zwischen $y = a$ und $y = b$ liegen. Ist also EDABC (Fig. 12.) die zu $z^2 = py$ gehörige Parabel, so werden durch obige Gleichung, wenn $AG = a$ und $AF = b$ gesetzt wird, die Bogen BC und DE als allein gültig herausgeschnitten.

15. Wie so eine aus beliebig vielen Theilen bestehende Coordinatenlinie, die unter beliebigen, constanten oder veränderlichen Winkeln zusammenstoßen, bequeme analytische Ausdrücke für die verschiedenartigsten geometrischen Gebilde liefert; so macht es dieselbe auch möglich, den Gleichungen von beliebig vielen veränderlichen Größen eine geometrische Bedeutung zu geben. Wenn diese an einer Gleichung von zwei oder mehreren Veränderlichen zu untersuchen ist, so hat man zunächst eine geeignete Coordinatenlinie auszuwählen, und wenn Winkelfunctionen in der Gleichung nicht vorkommen, constante Werthe für die Winkel $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ festzusetzen. Von der Größe dieser Winkel hängt natürlich auch die geometrische Bedeutung der Gleichung ab. Dabei ist es in keinem Falle ausgeschlossen, daß man $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$ setzt, so daß das zu bestimmende

Gebilde in einer Ebene bleibt, ja man kann auch $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$ setzen, bei welcher Annahme jede Gleichung eine grade Linie darstellt, welche mit der Axe zusammenfällt.

Untersuchen wir die Gleichung des Kreises

$$1.\quad y^2 + z^2 = r^2$$

unter der Annahme $\mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$. Da die beiden Coordinaten in eine Grade zusammenfallen, so können wir ihre Summe $y + z$ mit X bezeichnen und also für z in unsere Gleichung $X - y$ substituiren. Wir erhalten

$$2.\quad X^2 - 2yX = r^2 - 2y^2.$$

In dieser Gleichung sind noch zwei veränderliche Größen enthalten, y ist daher als eine durch eine Coordinate nicht repräsentirte Veränderliche zu betrachten. Wenn wir derselben alle möglichen Werthe beilegen, welche X nicht imaginär machen, so bestimmen die Werthe von X alle Punkte unserer Graden. Nach X gelöst, ergiebt die Gleichung 2.:

$$3.\quad X = y \pm \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß X nur reell ist für diejenigen Werthe von y, welche zwischen $+r$ und $-r$ liegen. Somit ist die durch unsere Gleichung bestimmte grade Linie nicht unbegrenzt, sondern liegt zwischen den Grenzen $X = +r$ und $X = -r$ und hat außerdem die Eigenthümlichkeit, daß sie in allen ihren Punkten, mit Ausnahme der Endpunkte, doppelt ist; denn jeder bestimmte Werth X′ von X wird durch zwei verschiedene Werthe von y hervorgebracht. Wird nämlich X′ für X in die Gleichung 2. substituirt, und die Gleichung nach y gelöst, so ergiebt sich

$$4.\quad y = \frac{X'}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2r - X'^2}.$$

Es giebt also zwei Werthe von y, welche dem X den Werth X′ ertheilen. Nur die Werthe $X = +r$ und $X = -r$ fordern bezüglich die Werthe $y = +r$ und $y = -r$.

Betrachten wir dieselbe Gleichung, indem wir $\mathfrak{y} = \alpha$ annehmen. Führen wir rechtwinklige Coordinaten X und Y ein, so ist $X = y + z \cos\alpha$ und $Y = z \sin\alpha$. Wenn man aus diesen und der gegebenen Gleichung y und z eliminirt, so erhält man

$$5.\quad Y^2 - 2XY\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{1 + \cos\alpha^2} + X^2\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha} - r^2\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha} = 0.$$

Führen wir neue rechtwinklige Axen ein, welche mit den früheren den Winkel β einschließen, so ergiebt sich für den Coefficienten von XY der Ausdruck $2\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{1 + \cos^2\alpha} - \frac{4 \sin\beta \cos\beta}{1 + \cos^2\alpha}$. Bestimmen wir β so, daß dieser Coefficient gleich Null wird, daß also $\sin 2\beta = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ ist, so giebt die Gleichung zu jedem Werthe von X zwei gleiche aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Werthe von Y, es fällt also dann die Axe mit der großen Axe der Ellipse zusammen. Unsere Gleichung ist also unter den angenommenen Bedingungen der Ausdruck für eine Ellipse, deren Axe mit der ursprünglich angenommenen festen Axe den Winkel β einschließt, wenn $\sin 2\beta = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ ist.

16. Die Gleichung 1. $x + by + cz = d$ ist die Gleichung einer Ebene für rechtwinklige Coordinaten. Betrachten wir dieselbe bei der Annahme $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$, so daß alle Punkte des Gebildes in der festen Ebene bleiben, und setzen $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 90^0$. Wenn man dem z einen bestimmten Werth $z = z'$ giebt, so ist der Schnitt dieser Constanten eine gerade Linie in der festen Ebene; ertheilt man dem z nach und nach alle möglichen Werthe, so schiebt sich diese Grade immer mit sich selbst parallel in der festen Ebene fort, und da in der Gleichung keine Beschränkung für die Werthe von z liegt, so daß z alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, so drückt also obige Gleichung die ganze, unbegrenzte feste Ebene aus. Um die Gleichung auf rechtwinklige Coordinaten X und Y zurückzuführen, haben wir $X = x - z$ und $Y = y$. Aus diesen beiden und der gegebenen Gleichung lassen sich zwei veränderliche Größen, etwa y und x eliminiren; man erhält:

$$2.\quad X + bY + (c+1)z = d.$$

Da die Veränderliche z in dieser Gleichung noch enthalten ist, so muß man schließen, daß eine Ebene sich durch zwei rechtwinklige Coordinaten nicht ausdrücken lasse. z ist wieder eine durch keine Coordinate repräsentirte Veränderliche, und indem man derselben alle möglichen Werthe giebt, findet man alle Punkte der Ebene. Jeder bestimmte Punkt der Ebene, dessen Coordinaten X' und Y' sind, fordert aber einen bestimmten Werth von z, nämlich

$$z = \frac{d - bY' - X'}{c+1}.$$

17. Wird die Gleichung des Kegels

$$1.\quad z^2 + y^2 = x^2 tg^2 \alpha$$

auf dieselben Coordinaten $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$, $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 90^0$ bezogen, so ergeben die Schnitte der Constanten $z = z'$ sämmtlich Hyperbeln, bestimmt durch die Gleichung $y^2 = x^2 tg^2 \alpha - z'^2$, ebenso die Schnitte der Constanten $y = y'$, dagegen sind alle Schnitte der Constanten $x = x'$ Kreise, bestimmt durch die Gleichung $z^2 + y^2 = x'^2 tg^2 \alpha$. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen sämmtlich in der festen Axe, ihre Radien aber $x\, tg\, \alpha$ ändern sich mit x und sind dieser Größe proportional, welche zugleich den Abstand der Mittelpunkte vom Anfangspunkt der Axe ausdrückt. Es folgt daraus, daß alle diese Kreise zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, welche sich im Anfangspunkt der Coordinaten schneiden und mit der Axe einen Winkel β einschließen, dessen Sinus gleich dem Quotienten aus dem Radius eines dieser Kreise durch den Abstand seines Mittelpunktes vom Anfangspunkt der Coordinaten, also gleich $\frac{x\, tg\, \alpha}{x}$ ist, also $\sin \beta = tg\, \alpha$. Unsere Gleichung drückt also den ganzen Raum zwischen den Schenkeln des Winkels 2β, bestimmt durch die Gleichung $\sin \beta = tg\, \alpha$, aus, der durch die Axe halbirt wird. Alle Schnitte senkrecht auf die Axe des ursprünglichen Kegels erscheinen um die Durchschnittslinie mit der festen Ebene gedreht und in die feste Ebene niedergelegt. Denken wir uns einen dieser Schnitte so fortbewegt, daß sein Mittelpunkt immer in der festen Axe und sein veränderlicher Radius immer $x\, tg\, \alpha$ bleibt, so beschreibt seine Peripherie den Raum zwischen den Schenkeln des Winkels 2β. Dabei liegt aber jeder Punkt unserer Fläche in der Peripherie zweier solcher Schnitte, es ist also die Fläche

gewissermaßen doppelt, indem jeder Punkt durch die Gleichung zweimal bestimmt ist; die Fläche des Kegels ist gleichsam in eine Ebene zusammengedrückt. Nur die beiden begrenzenden Graden bestehen aus einfachen Punkten.

Zu demselben Resultate wären wir durch Einführung von zwei rechtwinkligen Coordinaten X und Y gekommen. Setzen wir $X = x - z$ und $Y = y$, so nimmt die Gleichung 1. folgende Gestalt an:

$$2.\quad Y^2 = (X + z)^2 tg^2 \alpha - z^2,$$

in welcher die Veränderliche z durch eine Coordinate nicht repräsentirt ist. Um zu erfahren, wie viele Werthe von z zu einem bestimmten Punkte der Ebene, dessen Coordinaten X' und Y' sind, führen, substituiren wir diese Coordinaten und lösen die Gleichung 2. nach z; es kommt

$$3.\quad z = \frac{X' tg^2 \alpha \pm \sqrt{X'^2 tg^2 \alpha - Y'^2 (1 - tg^2 \alpha)}}{(1 - tg^2 \alpha)^2},$$

woraus hervorgeht, daß jeder Punkt (X'Y') der Fläche durch zwei Werthe von z bestimmt ist, mit Ausnahme derjenigen, für welche der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen verschwindet. Soll z und also auch Y nicht imaginär werden, so darf der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nicht negativ werden, und wenn wir denselben gleich Null setzen, so ergeben sich daraus alle Werthe von Y, für welche es vom Reellen zum Imaginären übergeht, also die Grenzlinie unserer Fläche. Wenn man in dem Ausdruck $X^2 tg^2 \alpha - Y^2 (1 - tg^2 \alpha)$ die veränderlichen Größen X und Y als rechtwinklige Coordinaten betrachtet, so stellt die Gleichung

$$4.\quad X^2 tg^2 \alpha - Y^2 (1 - tg^2 \alpha) = 0$$

zwei grade Linien dar, welche die Axe im Anfangspunkt der Coordinaten schneiden und mit derselben die Winkel $\pm\beta$ bilden, wenn $\pm tg\,\beta = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 - tg^2 \alpha}}$ ist, und da $tg\,\beta = \frac{sin\,\beta}{\sqrt{1 - sin^2 \beta}}$, so ist $sin\,\beta = tg\,\alpha$. Unsere Fläche ist also von zwei graden Linien begrenzt, welche mit der Axe die Winkel $\pm\beta$ einschließen, so daß $sin\,\beta = tg\,\alpha$ ist.

Würden in derselben Gleichung 1. die Bedingungen des Coordinatensystems so geändert, daß man $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 0$, $\mathfrak{Z} = \gamma$, $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 90^\circ$ setzte, so ergäbe dieselbe einen schiefen Kegel, dessen Axe unter dem Winkel γ gegen die kreisförmige Basis geneigt wäre; setzte man aber zugleich $\mathfrak{z} = \beta$ statt $\mathfrak{z} = 90^\circ$, so ginge die Basis in eine Ellipse über, denn alle Schnitte der Constanten $x = x'$ geben die Gleichung $z^2 + y^2 = x'^2 tg^2 \alpha$, welche, wie wir oben gezeigt haben, bei der Annahme $\mathfrak{z} = \beta$ eine Ellipse darstellt.

18. Sollte die Gleichung der Kugel

$$1.\quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

auf eine Coordinatenlinie bezogen werden, welche in einer Ebene liegt, also $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$ sein, und wird $\mathfrak{x} = 0$ gesetzt, so haben wir, um zu zwei rechtwinkligen Coordinaten X und Y überzugehen, die Reductionsformeln

$$2.\quad X = x + y\,cos\,\mathfrak{y} + z\,cos\,(\mathfrak{y} + \mathfrak{z})$$

$$3.\quad Y = y\,sin\,\mathfrak{y} + z\,sin\,(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}).$$

Eliminirt man aus den Gleichungen 1. bis 3. die Veränderlichen y und z, so kommt

$$4.\quad (X-x)^2[\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin^2\mathfrak{y}]-2Y(X-x)[\sin(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})\cos(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{y}]$$
$$+Y^2[\cos(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\cos^2\mathfrak{y}] = (a^2-x^2)\sin^2\mathfrak{z}.$$

In dieser Gleichung ist x noch enthalten, weil die durch die Gleichung ausgedrückte Fläche sich durch zwei Coordinaten nicht ausdrücken läßt, x ist also eine Veränderliche, die durch eine Coordinate nicht repräsentirt ist und welcher alle Werthe gegeben werden müßen, die X und Y nicht imaginär machen. Nach x geordnet lautet die Gleichung 4.:

$$5.\quad \left.\begin{array}{l} x^2[\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin^2\mathfrak{y}+\sin^2\mathfrak{z}]+2Yx[\sin(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})\cos(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{y}] \\ -2Xx[\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin^2\mathfrak{y}]-2YX[\sin(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})\cos(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{y}] \\ +Y^2[\cos^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\cos^2\mathfrak{y}]+X^2[\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin^2\mathfrak{y}]-a^2\sin^2\mathfrak{z} \end{array}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung ergiebt zu jedem Werthe von X und Y im Allgemeinen zwei Werthe von x, und nur für diejenigen Werthe von X und Y, für welche x vom Reellen zum Imaginären übergeht, ergeben sich für x einfache Werthe. Die entsprechenden Werthe von X und Y sind die Coordinaten aller der Punkte, welche in der unsere Fläche begrenzenden Curve liegen. Die Gleichung dieser Curve erhalten wir, wenn wir die Gleichung 5. nach x auflösen und den unter dem Wurzelzeichen enthaltenen Ausdruck gleich Null setzen. Entwickeln wir nur den Theil des Ausdruckes für x, welcher unter dem Wurzelzeichen vorkommt, so erhalten wir

$$6.\quad X^2[\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin^2\mathfrak{y}]-2XY[\sin(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})\cos(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{y}]$$
$$+Y^2[\cos^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\cos^2\mathfrak{y}+1]-a^2[\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\sin^2\mathfrak{y}+\sin^2\mathfrak{z}] = 0$$

als Gleichung der Grenzcurve unserer Fläche. Setzen wir $\mathfrak{y}=90^\circ$ und $\mathfrak{z}=90^\circ$, so verwandelt sich die Gleichung 6. in

$$7.\quad X^2+2Y^2 = 2a^2.$$

In diesem Falle ist also die Fläche umschlossen von einer Ellipse, deren halbe kleine Axe gleich dem Halbmesser der Kugel und deren halbe große Axe gleich $a\sqrt{2}$ ist.

19. Wenden wir uns zu einigen Gleichungen mit vier veränderlichen Größen und zwar zunächst zu der des ersten Grades:

$$1.\quad w+ax+by+cz = d.$$

Wird $\mathfrak{W}=\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=0$ gesetzt, so bleiben alle Punkte des räumlichen Gebildes in einer Ebene und wenn $w=0$, $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}=\mathfrak{z}=90^\circ$ ist, so erhalten wir durch Einführung von zwei rechtwinkligen Coordinaten X und Y mit Hülfe der Ausdrücke $X=w-y$, $Y=x-z$ die Gleichung

$$2.\quad X+aY+(b+1)y+(c+a)z-d = 0.$$

In dieser Gleichung sind zwei durch Coordinaten nicht repräsentirte Veränderliche y und z zurückgeblieben, denen wir alle möglichen Werthe geben können, denn die Gleichung schließt keinen Werth aus. Für bestimmte Werthe von $y=y'$ und $z=z'$ ergiebt unsere Gleichung die gerade Linie $X+aY+(b+1)y'+(c+a)z'-d=0$, welche die feste Axe in der Entfernung

$d-(b+1)y'-(c+a)z'$ schneidet, und alle die Graden, welche zu verschiedenen Werthen von $d-(b+1)y'-(c+a)z'$ gehören, sind unter sich parallel. Wenn man also den Werth von $d-(b+1)y'-(c+a)z'$ von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen läßt, so bewegt sich gewissermaßen die grade Linie $X+aY+(b+1)y'+(c+a)z'=0$ immer in paralleler Lage durch die ganze feste Axe. Die Gleichung 1. ist also unter den aufgestellten Bedingungen der Ausdruck für die unbegrenzte feste Ebene. Jeder Punkt dieser Ebene ist aber unendlich oft bestimmt, nämlich durch alle Combination der Werthe von y und z, welche der Gleichung $(b+1)y+(c+a)z = d-X'-aY'$ genügen, wenn X' und Y' die Coordinaten des Punktes sind.

Aendern wir bei derselben Gleichung 1. die Bedingungen des Coordinatensystems dahin ab, daß $\mathfrak{W}=0$, $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=90^\circ$ und $\mathfrak{w}=0$, $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}=\mathfrak{z}=90^\circ$ ist, so daß die Coordinatenlinie nicht mehr in einer Ebene liegt. Um die Gleichung durch drei rechtwinklige Coordinaten auszudrücken, haben wir $X=w-z$, $Y=x$, $Z=y$ und wir erhalten die Gleichung:

$$3.\quad X+aY+bZ = d-(c+1)z.$$

Jeder Schnitt der Constanten $z=z'$, welche jetzt keine Coordinate mehr darstellt, ist eine Ebene, welche die Axe in der Entfernung $d-(c+1)z'$ vom Anfangspunkte der Coordinatenlinie schneidet; und da alle diese Ebenen, welche zu verschiedenen Werthen von z gehören, unter sich parallel sind, und da der Ausdruck $d-(c+1)z'$ jeden beliebigen Werth annehmen kann, so ist unsere Gleichung jetzt der Ausdruck für den ganzen unendlichen Raum. Jeder Punkt des Raums ist aber durch die Gleichung nur einmal bestimmt, da die Coordinaten eines bestimmten Punktes X'Y'Z' auch einen bestimmten Werth von z, nämlich $z=\frac{d-X'-aY'-bZ'}{c+1}$ fordern.

20. Wählen wir eine Gleichung von vier Veränderlichen vom zweiten Grade, etwa

$$1.\quad aw^2+bx^2+cy^2+dz^2=r^2$$

und setzen $\mathfrak{W}=\mathfrak{w}=0$, $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=\mathfrak{x}=\mathfrak{y}=\mathfrak{z}=90^\circ$. Die Gleichung wird auf drei rechtwinklige Coordinaten zurückgeführt, wenn man die Werthe von w, x und y aus den Gleichungen $X=w-z$, $Y=x$, $Z=y$ in sie substituirt. Es ergiebt sich

$$2.\quad aX^2+2aXz+bY^2+cZ^2+(a+d)z^2=r^2,$$

und man erhält alle Punkte des durch die Gleichung ausgedrückten Gebildes, wenn man der durch eine Coordinate nicht repräsentirten Veränderlichen z alle durch die Gleichung gestatteten Werthe ertheilt, ohne die Coordinaten imaginär zu machen. Jeder Schnitt der Constanten $z=z'$ ist ein Ellipsoid, und jeder durch die Coordinaten X', Y', Z' bestimmter Punkt liegt in zwei solchen Schnitten, denn da die Gleichung 2. nach z vom zweiten Grade ist, so giebt dieselbe zu den Werthen X', Y', Z' zwei Werthe von z. Zu jedem Werthe X' und Y' von X und Y gehört aber eine unendliche Anzahl verschiedener Werthe von Z, welche durch die Werthe bestimmt werden, die man dem z willkürlich ertheilt. Es geht daraus hervor, daß die Gleichung 1. nicht eine Oberfläche sondern einen Körper ausdrückt. Nach Z gelöst giebt die Gleichung 2.:

$$3.\quad z = \frac{-aX \pm \sqrt{r^2(a+d) - adX^2 - b(a+d)Y^2 - c(a+d)Z^2}}{a+d},$$

z kann, wie diese Gleichung zeigt, nur solche Werthe annehmen, für welche $r^2(a+d)$ nicht kleiner ist, als $adX^2 + b(a+d)Y^2 + c(a+d)Z^2$, weil es für alle anderen Werthe imaginär wird. Innerhalb dieser Grenzen erhält man für z immer zwei Werthe mit Ausnahme des Falles, wo $r^2(a+d) = adX^2 + b(a+d)Y^2 + c(a+d)Z^2$ wird. In diesem Falle, wo z vom Reellen zum Imaginären übergeht, ergiebt sich für z nur der Werth $-\frac{aX}{a+d}$ und die Gleich. 2. drückt für diesen Werth von z die äußersten Punkte des Körpers, die Oberfläche aus. Wir erhalten die Gleichung derselben, wenn wir den unter dem Wurzelzeichen enthaltenen Ausdruck in der Gleichung 3. gleich Null setzen, also

$$4.\quad adX^2 + b(a+d)Y^2 + c(a+d)Z^2 = r^2(a+d).$$

Das ist aber die Gleichung eines Ellipsoides, dessen drei halbe Hauptaxen $\sqrt{\frac{r^2(a+d)}{ad}}$, $\sqrt{\frac{r^2}{b}}$, $\sqrt{\frac{r^2}{c}}$ sind. Die Gleichung 1. ist also unter den angegebenen Bedingungen des Coordinatensystems der analytische Ausdruck dieses Ellipsoides und zwar nicht nur der Oberfläche desselben, sondern des ganzen, durch dieselbe begrenzten Raumes.

21. Wird dieselbe Gleichung

$$1.\quad aw^2 + bx^2 + cy^2 + dz^2 = r^2$$

auf eine Coordinatenlinie bezogen, welche ganz in einer Ebene liegt, also $\mathfrak{W} = \mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$ gesetzt, und der einfacheren Reduction wegen, wieder $w = 0$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 90°$ genommen, so ist, wenn X und Y zwei rechtwinklige Coordinaten sind, $X = w - y$, $Y = x - z$. Durch Substitution der entsprechenden Werthe von w und x in die Gleichung 1. ergiebt sich

$$2.\quad a(X+y)^2 + b(Y+z)^2 + cy^2 + dz^2 = r^2$$

oder nach y und z geordnet

$$3.\quad (a+c)y^2 + 2aXy + (b+d)z^2 + 2bYz + aX^2 + bY^2 - r^2 = 0.$$

Nun ist aber $(a+c)y^2 + 2aXy + aX^2 = (a+c)\left(y + \frac{a}{a+c}X\right)^2 + \frac{acX^2}{a+c}$

und $(b+d)z^2 + 2bYz + bY^2 = (b+d)\left(z + \frac{b}{b+d}Y\right)^2 + \frac{bdY}{b+d}$.

Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir aus der Gleichung 3.:

$$4.\quad (a+c)\left(y + \frac{a}{a+c}X\right)^2 + (b+d)\left(z + \frac{b}{b+d}Y\right)^2 = r^2 - \frac{acX^2}{a+c} - \frac{bdY^2}{b+d}.$$

Werden dem X und Y bestimmte Werthe X′ und Y′ ertheilt, und x und y als rechtwinklige Coordinaten betrachtet, so ist 4. die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Coordinaten $\frac{a}{a+c}X'$ und $\frac{b}{b+d}Y'$ bestimmt ist, und deren halbe Axen $\sqrt{\frac{1}{a+c}\left(r^2 - \frac{acX'^2}{a+c} - \frac{bdY'^2}{b+d}\right)}$

und $\sqrt{\frac{1}{b+d}\left(r^2-\frac{acX'^2}{a+c}-\frac{bdY'^2}{b+d}\right)}$ sind. In den Gleichungen 2. bis 4. sind y und z Veränderliche, welche durch Coordinaten nicht repräsentirt sind, und denen wir alle Werthe ertheilen müssen, welche keine der Größen X, Y, Z imaginär machen. Solcher Werthe von y und z, welche auf einen durch die Coordinaten X', Y', Z' bestimmten Punkt führen, giebt es unendlich viele; dieselben bilden gewißermaßen die Coordinaten der durch die Gleichung 4. bestimmten Ellipse, deren Mittelpunkt dieser Punkt (X', Y', Z') ist. Die Grenzwerthe von X und Y, für welche die Werthe der Coordinaten vom Reellen zum Imaginären übergehen, und die also den Punkten der Curve entsprechen, welche die Fläche begrenzt, erhalten wir, wenn wir die rechte Seite der Gleichung 4. gleich Null setzen, also

$$5.\quad \frac{acX^2}{a+c}+\frac{bdY^2}{b+d}=r^2.$$

Die ganze, durch die Gleichung 1. dargestellte Fläche ist also durch eine Ellipse begrenzt, die durch die Gleichung 5. bestimmt ist, und jeder Punkt innerhalb derselben ist durch die Gleichung 1. unendlich oft ausgedrückt.

22. Setzen wir in der zuletzt betrachteten Gleichung $-cy$ statt cy^2, so daß sie lautet

$$1.\quad aw^2+bx^2+dz^2=cy$$

und nehmen $\mathfrak{W}=0$, $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=90^\circ$, $\mathfrak{w}=0$, $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}=\mathfrak{z}=90^\circ$, so erhalten wir für drei rechtwinklige Coordinaten X, Y, Z mit Hülfe der Formeln $X=w+z$, $Y=x$, $Z=y$ die Gleichung

$$2.\quad a(X-z)^2+bY^2+dz^2=cZ,$$

in welcher dem z, welches keine Coordinate darstellt, alle möglichen Werthe zu ertheilen sind, die für X, Y, Z reelle Werthe geben. Wie oben ist auch hier leicht zu erkennen, daß die Gleichung nicht eine Fläche, sondern einen ganzen Körper darstellt, weil sie zu jedem Werthe der Constanten $X=X'$ und $Y=Y'$ noch unendlich viele Combinationen von Z und z zuläßt. Da aber die Gleichung nach z vom zweiten Grade ist, so liegen die Werthe von z, welche die drei rechtwinkligen Coordinaten reell machen, zwischen gewissen Grenzen. Nach z gelöst, giebt die Gleichung 2.:

$$3.\quad z=\frac{aX}{a+d}\pm\frac{1}{a+d}\sqrt{(cZ-bY^2)(a+d)-adX^2},$$

es sind also nur solche Werthe von z zuläßig, für welche $cZ-bY^2-\frac{adX^2}{a+d}$ nicht negativ ist; jeder Punkt des Körpers ist aber durch 2 Werthe von z bestimmt, nur die Punkte sind einfach, für welche z vom Reellen zum Imaginären übergeht, für welche also der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in der Gleichung 3. verschwindet. Die Gleichung der Oberfläche unseres Körpers ist also

$$4.\quad cZ-bY^2-\frac{ad}{a+d}X^2=0.$$

Es ist 4. die Gleichung eines elliptischen Paraboloides; jeder Schnitt senkrecht auf die Axe der Z ist eine Ellipse, jeder Schnitt senkrecht auf eine der andern Axen eine Parabel; der Körper erweitert sich also in der Richtung der Axe der Z nach der positiven Seite hin ins Unendliche.

23. Wird dieselbe Gleichung auf eine Coordinatenlinie bezogen, welche ganz in einer Ebene liegt, also $\mathfrak{W} = \mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$ gesetzt, bleibt $\mathfrak{w} = 0$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 90$, und führt man zwei rechtwinklige Coordinaten X und Y ein, so erhält man, da $X = w + y$ und $Y = x + z$ ist,

$$1.\quad a(X-y)^2 + b(Y-z)^2 + dz^2 = cy.$$

Giebt man dem X und Y constante Werthe, so daß sie einen bestimmten Punkt in der Ebene bezeichnen, so läßt die Gleichung doch noch unendlich viele Combinationen der Werthe von y und z zu. Um zu erfahren, in welche Grenzen dieselben eingeschlossen sind, ertheilen wir dem y einen constanten Werth y′ und lösen die Gleichung 1. nach z, so kommt

$$2.\quad z = \frac{bY}{b+d} \pm \frac{1}{b+d}\sqrt{[(c+2aX)y' - ay'^2 - aX^2](b+d) - bdY^2},$$

welche Werthe nur reell werden, wenn der unter dem Wurzelzeichen enthaltene Ausdruck gleich oder größer als Null ist. Die äußersten reellen Werthe von X und Y in dem Schnitte der Constanten $y = y'$ sind also bestimmt durch die Gleichung

$$3.\quad ay'^2 - (c+2aX)y' + aX^2 - \frac{bd}{b+d}Y^2 = 0.$$

Wenn wir nun dem y in dieser Gleichung nach und nach immer größere Werthe ertheilen, so rückt dieser Schnitt immer parallel mit sich selbst fort und beschreibt unsere Fläche. Die Linie, welche dieselbe begrenzt, erhalten wir aus der Gleichung 3., wenn wir sie nach y′ auflösen und den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null setzen. Es kommt

$$4.\quad y' = \frac{c+2aX}{2a} \pm \sqrt{-\frac{bd}{a(b+d)}Y^2 + \frac{c}{a}X + \frac{c^2}{4a^2}}$$

und daraus

$$5.\quad Y^2 = \frac{c(b+d)}{bd}X + \frac{c^2(b+d)}{4abd}.$$

Unsere Gleichung drückt also den ganzen Raum zwischen den Aesten der durch die Gleichung 5. bestimmten Parabel aus, und zwar giebt die Gleichung jeden Punkt dieser Fläche unendlich oft.

24. Wird endlich die Gleichung von fünf veränderlichen Größen

$$1.\quad u^2 + w^2 + x^2 + z^2 = a^2$$

auf eine Coordinatenlinie bezogen, welche so aus fünf Theilen besteht, daß jeder auf dem vorhergehenden senkrecht steht, und die Ebene je zweier Theile gegen die Ebene der beiden vorhergehenden unter einem rechten Winkel geneigt ist, so ist

$$\mathfrak{U} = u = 0,\quad \mathfrak{W} = \mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{w} = \mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 90^\circ.$$

Führen wir drei rechtwinklige Coordinaten X, Y, Z ein, indem wir aus 1. und den Gleichungen $X = u + y$, $Y = w + z$, $Z = x$ die Veränderlichen u, w und x eliminiren, so kommt

$$2.\quad (X-y)^2 + (Y-z)^2 + Z^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

in welcher Gleichung y und z durch Coordinaten nicht repräsentirt sind, denen also alle Werthe zu ertheilen sind, welche für X, Y, Z reelle Werthe geben. Die Entwickelung der Quadrate giebt

$$3.\quad X^2 - 2Xy + 2y^2 + Y^2 - 2Yz + 2z^2 + Z^2 = a^2.$$

Nun ist $X^2 - 2Xy + 2y^2 = 2(y - \frac{1}{2}X)^2 + \frac{1}{2}X^2$ und $Y^2 - 2Yz + 2z^2 = 2(z - \frac{1}{2}Y)^2 + \frac{1}{2}Y^2$. Werden diese Werthe in 3. substituirt, so erhält man

$$4.\quad (y - \tfrac{1}{2}X)^2 + (z - \tfrac{1}{2}Y)^2 = \frac{2(a^2 - Z^2) - X^2 - Y^2}{4}$$

Werden den X, Y, Z bestimmte Coordinatenwerthe X′, Y′, Z′ ertheilt, so giebt diese Gleichung alle Werthe von y und z, welche zu diesem Punkte führen. Es sind dies unzählige Combinationen, welche, wenn y und z als rechtwinklige Coordinaten betrachtet werden, der Gleichung 4. zufolge einen Kreis bestimmen, der um den Punkt, dessen Coordinaten $\frac{1}{2}X'$ und $\frac{1}{2}Y'$ sind, mit dem Radius $\frac{2a^2 - X'^2 - Y'^2 - 2Z'^2}{4}$ beschrieben ist. Da aber dieser Radius nicht negativ werden kann, ohne y oder z imaginär zu machen, so dürfen für X, Y, Z auch nur solche Werthe gesetzt werden, für welche $2a^2$ nicht kleiner ist, als $X^2 + Y^2 + 2Z^2$. Wir erhalten aber die äußersten Punkte des durch die Gleichung 2. dargestellten Körpers, wenn wir die rechte Seite der Gleichung 4. gleich Null setzen. Die Gleichung

$$5.\quad 2Z^2 + X^2 + Y^2 = 2a^2$$

giebt also die Grenzwerthe, für welche die Coordinaten vom Reellen zum Imaginären übergehen und ist also die Gleichung der Oberfläche des Körpers. Dieser ist also ein Sphäroid, von welchem die Gleichung 1. jeden Punkt, nicht nur die Oberfläche bestimmt.

Zu demselben Resultat wären wir auch durch folgende Betrachtung gelangt: Wird die Gleichung 4. nach y aufgelöst, so erhält man

$$6.\quad y = \tfrac{1}{2}X \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - z^2) - 2(Y-z)^2 - X^2 - 2Z^2};$$

damit y reell werde, muß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv sein, und wenn derselbe gleich Null wird, so ergiebt sich der äußerste reelle Werth von y. Wird die so erhaltene Gleichung

$$7.\quad 2(a^2 - z^2) - 2(Y-z)^2 - X^2 - 2Z^2 = 0$$

nach z gelöst, so kommt

$$8.\quad z = \tfrac{1}{2}Y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2a - X^2 - Y^2 - 2Z^2}.$$

Für die äußersten reellen Werthe findet also die Gleichung statt

$$9.\quad X^2 + Y^2 + 2Z^2 = 2a^2,$$

welche die Gleichung der Oberfläche unseres Körpers ist.

25. Wollte man dieselbe Gleichung in einer Ebene construiren, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{W} = \mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$ und zugleich $u = 0$, $w = \mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 90^0$ setzen, so hätte man zur Zurückführung auf zwei rechtwinklige Coordinaten die Gleichungen $X = u + x + z$ und $Y = w + y$. Eliminirt man aus diesen Gleichungen und der Gleichung 1. die Veränderlichen u und w, so erhält man

$$10.\quad (X-x-z)^2-(Y-y)^2+x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Von den Werthen der durch Coordinaten nicht repräsentirten Veränderlichen x, y, z, welche in der Gleichung zurückgeblieben sind, giebt es unendlich viele Combinationen, welche für X und Y reelle Werthe geben, ja welche für X und Y dieselben constanten Werthe X′ und Y′ geben, die zu einem bestimmten Punkte der Ebene gehören. Doch liegen diese Werthe zwischen gewissen Grenzen. Wird die Gleichung 10. nach y aufgelöst, so zeigt die erhaltene Gleichung

$$11.\quad y = \tfrac{1}{2}Y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2-(X-x-z)^2-2(x^2+z^2)-Y^2},$$

daß nur solche Werthe für y zulässig sind, für welche $2a^2-(X-x-z)^2-2(x^2+z^2)-Y^2$ positiv ist, und daß sich also die Grenzwerthe für y aus der folgenden Gleichung ergeben

$$12.\quad (X-x-z)^2-2(x^2+z^2)-Y^2=2a^2.$$

Nach x gelöst giebt diese Gleichung

$$13.\quad x = \frac{X-z}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2a-4z^2+(X-z)^2-Y^2-2X^2}.$$

Daraus ergiebt sich für die Grenzwerthe von y und x die Gleichung

$$14.\quad 2a^2-Y^2-X^2-3Z^2+2Xz=0,$$

welche, nach z gelöst, giebt

$$15.\quad z = \tfrac{1}{3}X \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6a^2-3Y^2-2X^2}.$$

Die äußersten Werthe also, welche für X und Y vorkommen können, das ist die Linie, welche die durch die Gleichung 1. dargestellte Fläche begrenzt, ist bestimmt durch die Gleichung

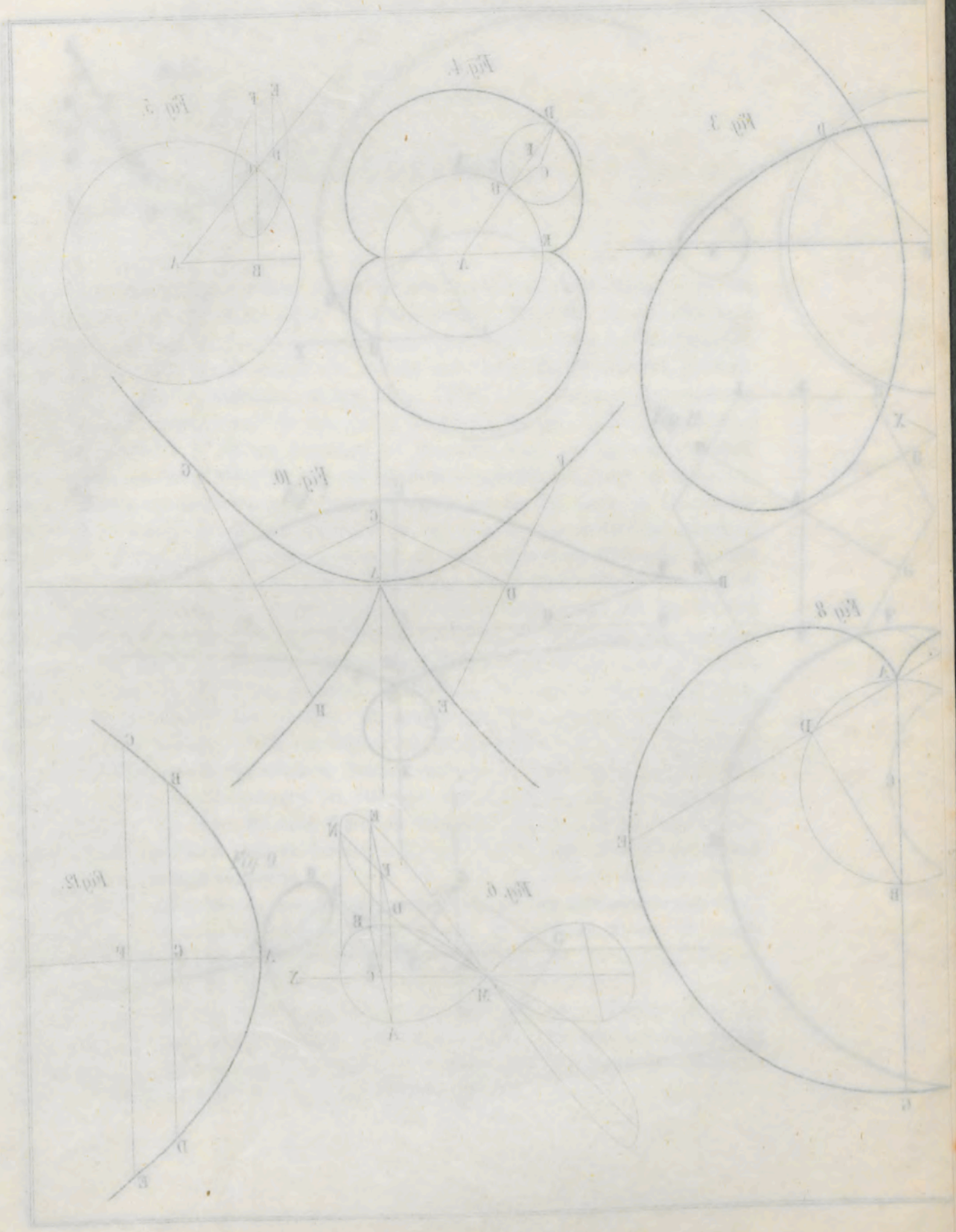
$$16.\quad 2X^2+3Y^2=6a^2.$$

Die Gleichung 1. drückt also eine Fläche aus, welche durch eine Ellipse mit den halben Axen $a\sqrt{3}$ und $a\sqrt{2}$ begrenzt ist, deren Punkte aber unendlich oft bestimmt sind.

Aus dem Vorstehenden ist leicht zu ersehen, wie man bei Untersuchung einer Gleichung zu verfahren habe, welche eine noch größere Anzahl veränderlicher Größen enthält.

Die betrachteten Beispiele dürften gezeigt haben, daß sich durch Einführung beliebig vieler Coordinaten, die sich unter beliebigen, constanten oder veränderlichen Winkeln schneiden, die analytischen Ausdrücke für viele Curven und Flächen sehr vereinfachen; daß dadurch solche Ausdrücke

für manche Linien, Flächen und Körper möglich werden, welche sich in den gebräuchlichen Coordinaten nicht bestimmen lassen; daß dadurch auch Gleichungen von beliebig vielen Veränderlichen eine geometrische Bedeutung gewinnen, und daß die Einführung solcher veränderlicher Größen, welche durch Coordinaten nicht repräsentirt sind, oft große Vortheile gewährt.



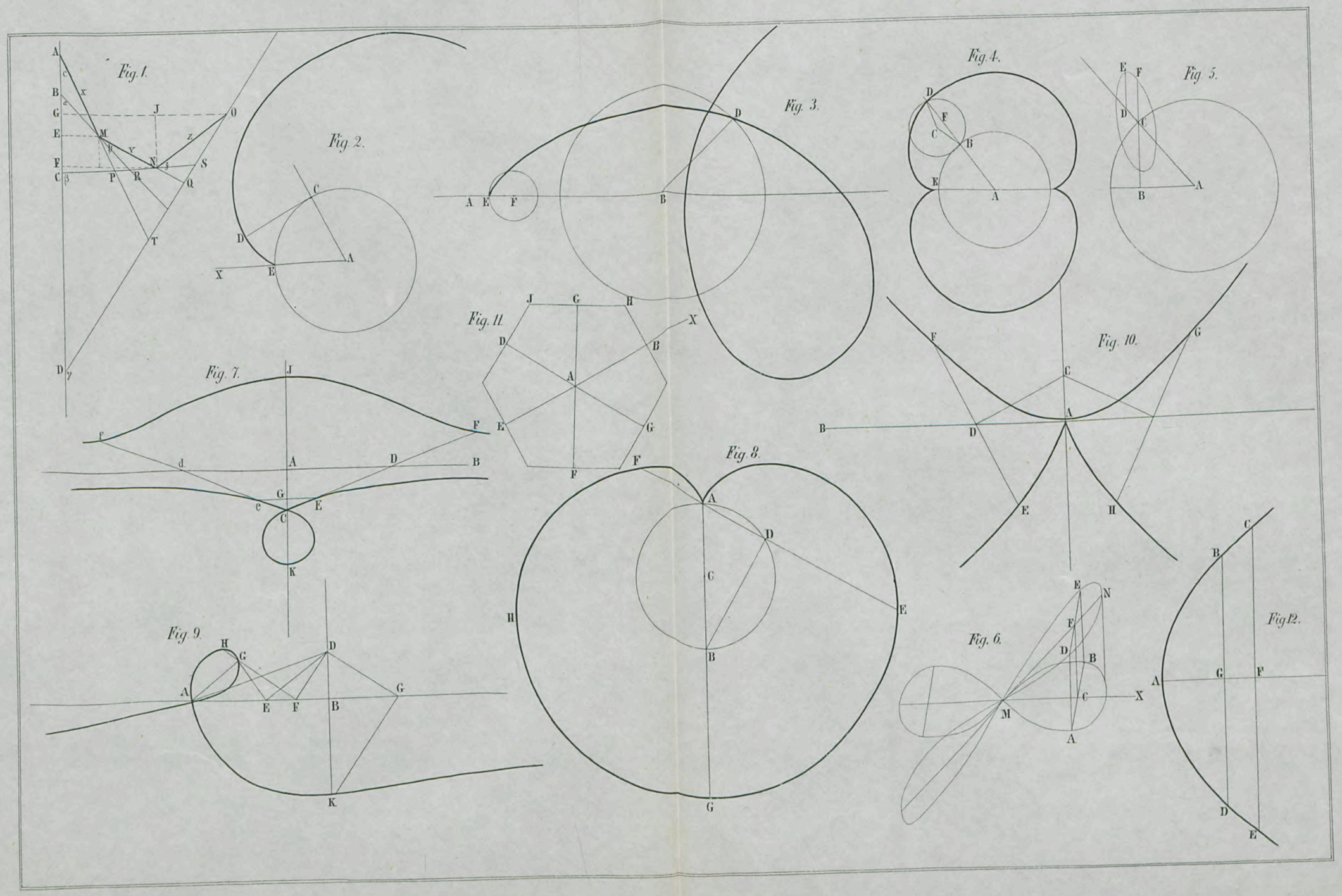
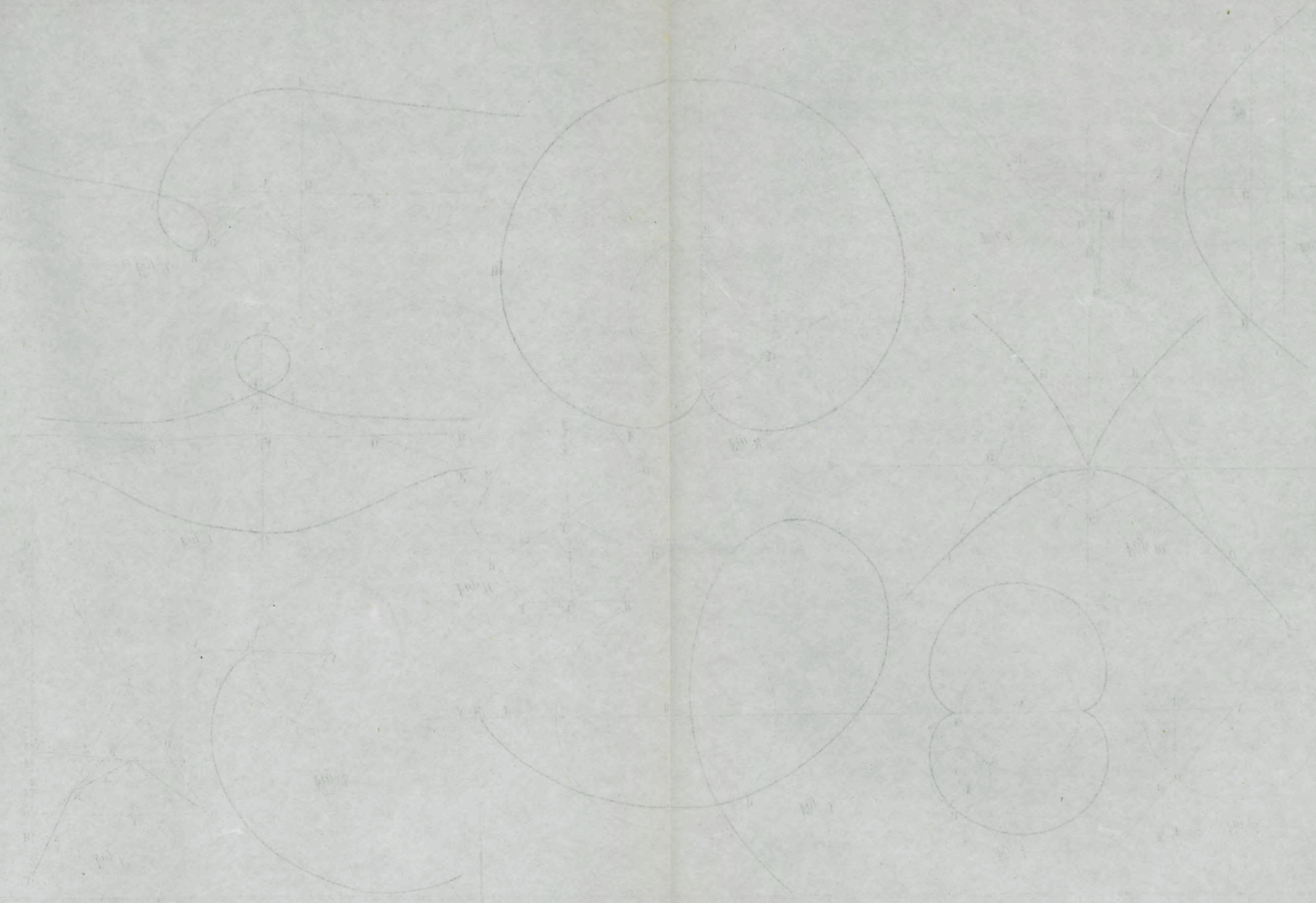
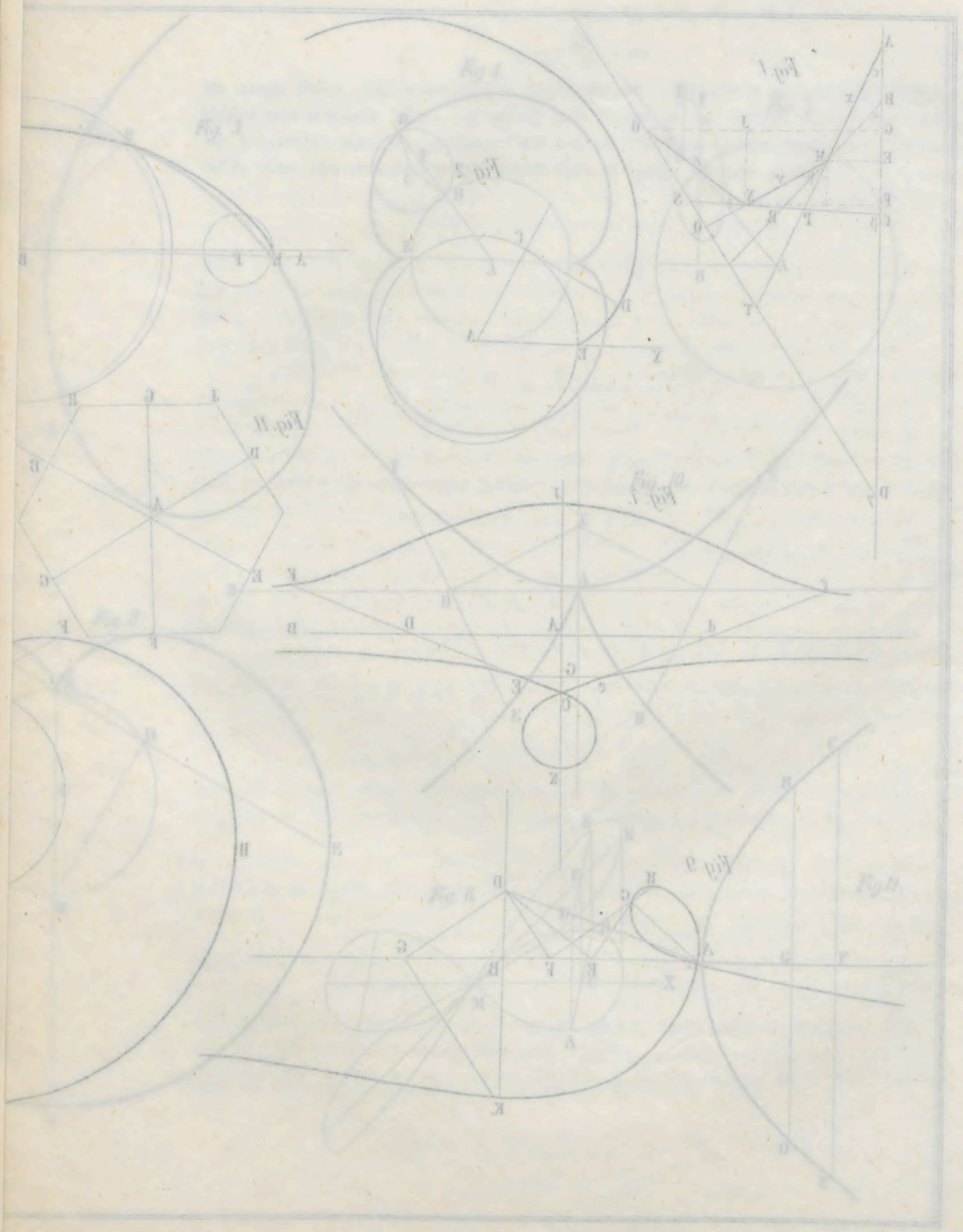


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.





Jahresbericht.

Im Laufe des Schuljahrs trat eine wichtige Veränderung in dem Lehrercollegium ein, da der älteste Lehrer am Gymnasium, Herr Dr. **Franz Friedrich Feldmann**, wegen zunehmender Augenschwäche sich veranlaßt fand um Entlassung von seinem Amte zu bitten und **Se. Majestät, der König**, diese Bitte am 17. August v. J. gnädigst unter Beilegung einer Pension bewilligte. Demnach schied Herr Dr. **Feldmann**, welcher am 7. October 1828 Allerhöchst zum ersten Lehrer der damaligen Vorbereitungsclasse und am 31. December 1833 zum fünften Lehrer ernannt war, am 1. October v. J. bei dem Schlußacte des Sommersemesters aus einer amtlichen Thätigkeit, welcher er dreizig Jahre des kräftigen Lebensalters gewidmet hat, und ich sprach dem geehrten Collegen den Dank des ganzen Lehrercollegiums aus für seine treue und unermüdliche Mitwirkung an unserem gemeinsamen Werke und die uns allen bewiesene Freundschaft, den Dank der Schüler für seine Sorgfalt in dem Unterrichte und seine wohlwollende Güte gegen sie, und unserer Aller Wunsch, den zahlreiche frühere Schüler und andere Freunde theilen werden, daß Er in Heiterkeit und Gesundheit die ihm gewährte ehrenvolle Ruhe genießen und den Seinigen lange erhalten bleiben möge! — Da der Abgang des Herrn Dr. **Feldmann** eine vorläufige Ergänzung der Lehrkräfte erforderlich machte, trat mit Genehmigung des Hohen Königlichen Ministeriums Herr Dr. **P. D. Ch. Hennings** als Hülfslehrer ein und das Gymnasium ist demselben für die Geschicklichkeit und den Eifer, mit welchem er die ihm gewordene Aufgabe erfüllte, zu vielem Danke verpflichtet. Nach dem Schlusse des Wintersemesters wird Herr Dr. **Hennings** an dem Rendsburger Real-Gymnasium in Function treten und wir sehen dagegen mit Vertrauen und guter Hoffnung dem Amtsantritte des bisherigen dritten Collaborators an dem genannten Real-Gymnasium, des Herrn **Friedrich Christian Kirchhoff**, entgegen, welcher von **Sr. Majestät, dem Könige**, unter dem 14. Februar d. J. zum fünften Lehrer am Gymnasium vom 20. April an allergnädigst ernannt ist.

Die Schülerzahl betrug in dem Sommersemester 158, in dem Wintersemester gleichfalls 158 Schüler; in dem ersteren waren in Prima 18, Secunda 25, Tertia 15, Quarta 22, Quinta 36, Sexta 29, Septima 13, in dem zweiten in Prima 22, Secunda 26, Tertia 18, Quarta 29, Quinta 24, Sexta 29, Septima 10 Schüler.

Leider habe ich auch in diesem Jahre den Tod eines sehr lieben Schülers zu melden. Am 15. Febr. starb nach einer kurzen, aber schmerzhaften Krankheit der Primaner **Karl Gustav Adolph Lüttgens** aus Hamburg; um den wackern, blühenden Jüngling trauern tief Lehrer und Schüler mit den geehrten Eltern, deren einziger Sohn er war!

Die Arbeiten an der Katalogisirung und Ordnung der Bibliothek sind ununterbrochen fortgeschritten; für die mir bei denselben im Sommer von dem Primaner **Scheer**, im Winter von dem Herrn Dr. **Hennings** geleistete Hülfe danke ich bestens. Der neue systematische Katalog der Mathematik, Physik und Naturgeschichte führt resp. 311, 88 und 110 Werke auf. Die Reinschrift des neuen systematischen Katalogs der Geographie und Statistik ist noch nicht fertig geworden. Die neuen Erwerbungen der Bibliothek durch amtliche Zusendung, Schenkung oder Ankauf belaufen sich in diesem Jahre nur auf ca. 80 Nummern. Durch amtliche Zusendung empfingen wir von dem **Königlichen Ministerium** für die Herzogthümer Holstein und Lauenburg die Programme der gelehrten Schulanstalten in der ganzen Monarchie aus dem Jahre 1858 und das Programm der Eutiner Schule, das Verzeichniß der Vorlesungen auf der Kopenhagener Universität in der ersten Hälfte des Jahres 1859, das 2te Heft von **Lindes** Meddelelser angaaende Kiøbenhavns Universitæt, das 1. und 2. Heft des 2. Bandes der Aarsberetninger fra det Kongelige Geheimearchiv, udgiven af **C. F. Wegener**. Ferner übersandte auf geneigte Verfügung Sr. Excellenz des damaligen Herrn Finanzministers **Andrä**, Großkreuz des Danebrogordens, das **Königliche Statistische Büreau** das wichtige Statistisk Tabelværk. Ny Række. Kbhvn, 1850 ff., Bd. 1—18, sammt den Meddelelser af det stat. Bureau. Kbhvn., 1852 ff. Samml. 1—4, und den Nachrichten über die Sparcassen in der Dänischen Monarchie in den Jahren 1854—56, mit der Zusage, daß die Fortsetzungen uns regelmäßig zugehen würden. Ferner von dem Herrn Amtmann, Kammerherrn **von Levetzau**, Commandeur des Danebrogordens, als Königlichem Commissarius bei der Holsteinischen Provinzial-Ständeversammlung die Zeitung für die Diät des Jahres 1859; von der **Commission** zur Herausgabe der Universitätsschriften die Schriften der Universität Kiel aus dem Jahre 1857; von dem Herrn Professor Dr. **Peters**, R. v. D., die Fortsetzung der Astronomischen Nachrichten; von der **Königlichen Gesellschaft** für Nordische Alterthumskunde: En Vandring gjennem Jægerspriis's Have og Lund. Kbhvn., 1858; von Frau Dr. **Schröder** das 1. Heft des 4. Bandes des von ihrem verstorbenen Hrn. Gemahl begonnenen Lexikons der Hamburgischen Schriftsteller; von dem Herrn Buchhändler **Rudolph** die Friesischen Sagen und Erzählungen von C. P. Hansen. Altona, 1858. und die Geschichte der alten Dithmarscher von E. Wislicenus. Altona, 1850; von dem Herrn Litteraten **Focke** die Schrift von M. F. Focke de aequationibus numericis sup. ordinis, Monast., 1856; von dem Primaner **N. Trier** the constitution of the united states of America. By W. Hickey. Philadelph., 1848; von dem Herrn Buchhändler **Ph. Henop**, einem früheren Schüler unseres Gymnasiums, seinen Leitfaden zur Literatur-Geschichte sämmtlicher neueren europäischen Völker mit Ausschluß der deutschen. Basel, 1858; von dem Herrn Dr. **H. Handelmann**, welcher gleichfalls des Gymnasiums stets freundlich gedenkt, die ersten Hefte seiner Geschichte von Brasilien. Berlin, 1858, und seine kleine Schrift Holsatia cantans. Rückblicke eines vormaligen Altonaer Liedertäflers auf die J. 1839—47; von dem zweiten Lehrer am Gymnasium, Herrn Dr. **Henrichsen**, M. Tullii Ciceronis tres de oratore ad Quintum fratrem ll. Lips., J. Thanner. 1515. 2. Dieses Exemplar einer sonst nicht seltenen oder werthvollen Ausgabe ist interessant

durch Ph. Melanchthons Handschrift, der dasselbe am 15. Jun. 1523 an Achilles Pirminius Gasser aus Lindau schenkte, welcher damals in Wittenberg studirte, sich später durch medicinische und astronomische Schriften, auch durch seine Mitwirkung bei den Centuriae Magdeburg. bekannt machte und als Physicus in Augsburg 1577 starb. Das Exemplar gehörte nachher einem Jesuiten-Collegium in Heidelberg. Die handschriftlichen Randbemerkungen Melanchthons haben weiter keinen Werth. — Für diese Geschenke statte ich hier im Namen des Christianeums den verbindlichsten Dank ab. Freunde der Wissenschaften und Literatur werden mich an jedem Sonnabend von 2—4 Uhr, mit Ausnahme der Ferien, auf der Bibliothek zur Erfüllung ihrer Wünsche bereit finden.

Das große **Leidersdorfsche Stipendium**, über dessen Verleihung in dem vorjährigen Programme noch nicht berichtet werden konnte, wurde am 22. März 1858 durch Beschluß der Lehrerconferenz dem Primaner **Ludwig Georg Schack Reuter** aus Apenrade auf zwei Jahre verliehen.

Das **Gählersche Stipendium** zum Betrage von 266 ℛ 64 ß R.M. jährlich auf drei Jahre steht jetzt wieder zur Verfügung und nachdem die Abschiedsreden gehalten sind, werden die **Herren Verwalter** statutenmäßig verkünden, welchem der unten genannten Abiturienten dasselbe zuerkannt sei.

Um das gleichfalls vacante **Schrödersche Stipendium** für einen Jurisprudenz Studirenden zum Betrage von 160 ℛ R.M. jährlich auf drei Jahre haben sich die Abiturienten **Dohrn, Scheer** und **Tamsen** beworben. Nach beendigtem schriftlichen und mündlichen Maturitätsexamen und Einreichung einer Lateinischen Abhandlung von Jedem der drei Bewerber hat das Hochansehnliche **Gymnasiarchal-Collegium**, dem die Verleihung zusteht, entschieden, daß nach Erwägung des hier in Betracht Kommenden und namentlich auch der größeren Bedürftigkeit das Stipendium für dieses Mal getheilt und die eine Hälfte der Abiturient **Tamsen**, die andere der Abiturient **Scheer** erhalten solle.

Das **Schrödersche Gymnasial-Stipendium** wurde von den **Herren Gymnasiarchen** auf meinen Vorschlag den Primanern **Ehlers, Dreessen, L. Henrichsen, Siemonsen** und **Feddersen** verliehen.

Der **Klausensche Aufmunterungs-** und **Unterstützungsfond** hat das Lehrercollegium in den Stand gesetzt einer größeren Anzahl von Schülern der drei oberen Classen seine Zufriedenheit theils durch Schenkung eines passenden Buchs, theils durch Gewährung einer Beihülfe an Geld zu erkennen zu geben.

Gegen Ende des Julius v. J. ging

Napoleon Trier aus Altona, in Prima seit Michaelis 1856,

mit dem erforderlichen Zeugnisse ab um das medicinische Studium auf der Universität in Kopenhagen zu beginnen.

Jetzt werden nach abgehaltenem Maturitätsexamen zur Universität abgehen:

Johannes Ehlers aus Hollerwettern, in Prima seit Michaelis 1856,

Friedrich Eduard Theodor Dohrn aus Heide, in Prima seit Ostern 1857,

Eduard Andreas Emil Scheer aus Rendsburg, in Prima seit Michaelis 1857 nach vorhergegangenem Besuch der Prima in Rendsburg,

Matthaeus Bernhard Theodor Chemnitz aus Burg auf Femern, in Prima seit Ostern 1857,

Theodor Georg Friedrich Milder Berthus Griebel aus Heide, in Prima seit Ostern 1857,

Theodor Sophus Tamsen aus Trittau, in Prima seit Ostern 1857,

Johann Georg Maximilian Schmidt aus Altona, in Prima seit Ostern 1857,

Christian Leonhard Suen Diederichsen aus Flensburg, in Prima seit Ostern 1857,

Bernhard Johann Heinrich Matthiessen aus Burg auf Femern, in Prima seit Ostern 1857.

Von den Genannten werden sich **Ehlers**, **Griebel** und **Diederichsen** dem Studium der Philologie, **Chemnitz** dem Studium der Theologie und **Dohrn**, **Scheer**, **Tamsen**, **Schmidt** und **Matthiessen** dem Studium der Jurisprudenz widmen.

Am Schlusse dieses Berichts lasse ich ein Verzeichniß sämmtlicher Schüler folgen, welche in dem Wintersemester unsere Classen besuchten.

Prima.

Johannes Ehlers aus Hollerwettern.
Georg Christ. Heinr. Theod. Henrichsen aus Flensburg.
Friedr. Ed. Theod. Dohrn aus Heide.
Ed. Andr. Emil Scheer aus Rendsburg.
Matth. Bernh. Theod. Chemnitz aus Burg auf Femern.
Theod. Georg Friedr. Milder Berthus Griebel aus Heide.
Theod. Sophus Tamsen aus Trittau.
Jürg. Aug. Sophocles Fedor Kirchhoff aus Flensburg.
Joh. Georg Maximil. Schmidt aus Altona.
Christ. Leonh. Suen Diederichsen aus Flensburg.
Bernh. Joh. Heinr. Matthiessen aus Burg auf Femern.
Ludwig Siemonsen aus Husbye.
Heinr. Georg Dreessen aus Dammfleth.
Friedr. Wilh. Funke aus Gr. Queern.
Christoph Heinr. Hanssen aus Tralau.
Joh. Herm. Ludwig Henrichsen aus Rendsburg.
Arnold Georg Versmann aus Friedrichsstadt.
Mart. Otto Ludwig Witt aus Hohenwestedt.
Hans Heinrich Hansen aus Flensburg.
Friedr. Aug. Feddersen aus Wester-Schnatebüll.
Joh. Ludolph Kahl aus Ahrensburg.

Secunda.

Hans Heinrich Petersen aus Kummerfeld.
Joh. Wilh. Matth. Peters aus Neuendorf.
Rud. Friedr. Theod. Karpf aus Altona.
Joh. Julius Reincke aus Altona.
Juan Baudisda Sandiago Cuello aus La Guayra.
Karl Joh. Friedr. Aldenhoven aus Rendsburg.
Emil Lübbes aus Altona.
Karl Friedr. Schorer aus Trittau.
Detlef Harders aus Huje.
Karl Friedr. Bruno von Alten aus Oedjendorf.
Christ. Phil. Wilh. Melchert aus Flemhude.
Ludwig August Gülich aus Pinneberg.
Karl Friedr. Wilh. Sieveking aus Altona.
Alfred Pingel aus Schleswig.
Christ. Joh. Mart. Greve aus Altona.
Joh. Heinr. Revenstorf aus Ridders.
Friedr. Rud. Nicol. Thomsen aus Soerup.
Karl Emil Lorenz Nievert aus Altona.
Christ. Friedr. Großkreuz aus Friedrichsstadt.
Claus Boie Hinrichs aus Lehe.
Lorenz Siemonsen aus Husbye.
Jul. Friedr. Theod. Engel aus Schleswig.
Claus Heinr. Reimers aus Bramstedt.
Gust. Jul. Friedr. Edlessen aus Friedrichsstadt.
Conrad Willers Jessen aus Uetersen.
Eugen Padel aus Christiansfeld.

Tertia.

Heinr. Martin Thau aus Altona.
Heinr. Ferd. Christian Löck aus Altona.
Wilh. Georg Christian Koopmann aus Heide.
Karl Eberh. Leonh. Behrens aus Groß-Flintbeck.
Emil Gabriel Warburg aus Altona.
Emil Wilhelm Cohen aus Aakier.
Jasper Wald aus Flensburg.
Ludwig Auerbach aus Altona.
Heinrich Struve aus Burg in Dithmarschen.
Karl Fedor Wilh. Peters aus Pulkowa.
Fabian Falk aus Chodziesen (Preuß. Prov. Posen).
Richard Wilhelm Semper aus Altona.
Victor Emil Gardthausen aus Kopenhagen.
Karl Joh. Adam Behn aus Altona.
Joh. Heinr. Emil Braun aus Altona.
Alfred Christian Boi Clement aus Kiel.
Gust. Christian Ludw. Tiedemann aus Altona.
Eduard Albert Koch aus Altona.

Quarta.

Friedr. Arrien Adolph Johnsen aus Stedesand.
Georg Siemonsen aus Husbye.
Frederik Mathildus von Beck aus Itzehoe.
Eduard Wilh. Brackenhoeft aus Stockelsdorf.
Joach. Karst. Wilh. Henrichsen aus Rendsburg.
Arnold Adolph Behrens, geb. bei Kiel.
Christian Thomsen aus Munkbrarup.
Leopold Julius Friedr. Schmidt aus Ottensen.
Gottfried Friedr. Leopold Dose aus Altona.
Heinr. Johann Julius Becher aus Rendsburg.
Hermann Michaelsen aus Brammer.
John Christian Pingel aus Schleswig.
Curt Stückrad aus Finsterwalde in Preußen.
Andr. Aug. Adolph Schmidt aus Rendsburg.
Ferd. Johs. Emil Rud. Flashoff aus Altona.
August Bernhard Jacob Adolph von Thaden aus Glückstadt.
Herm. Emil Johs. Gardthausen aus Neumünster.
Alfred Conrad Jürg. Martens aus Hamburg.
Hans Christian Sophus Eduard Henrichsen aus Mildstedt.
Gustav Carl Heinrich Donner aus Neuhaus in Hannover.
James Adolph Oppermann aus Wandsbeck.
Andreas Christian Busch aus Wedel.
Otto Georg Heinrich Scheuerlen aus Kiel.
Albrecht Karl Emil von Bastian aus Rostock.
Karl Hans Aug. Peter Melgaardt aus Altona.
Emil Gustav Adolph Meyer aus Altona.
Karl Theod. Heinrich Dedters aus Rendsburg.
Johannes Voß aus Altona.
Eduard Friedr. Wilh. Stavenow aus Elmshorn.
Johann Karl Friedrich Theodor Wendorff aus Altona.

Quinta.

Nicol. Ludwig Friedrich Bünsow aus Kiel.
Georg Wilh. Ernst Böneck aus Altona.
Emil Heinrich Joh. Ludwig aus Altona.
Ferdinand Friedr. Christoph Ohrt aus Altona.
Philipp Sußmann aus Altona.
Johann Hermann Mutz aus Altona.
Dagobert Marcus aus Altona.
Edwin Wilhelm Donner aus Neuhaus in Hannover.
Klaus Heinr. Wilh. Bolckens aus Altona.
Friedr. Wilh. Edmund Hintzpeter aus Altona.
Harald Schlotfeldt aus Neumünster.
Peter Christoph Ludolf Passau aus Altona.
Louis Voß aus Altona.
Gustav Elias aus Altona.
Friedrich Conrad von Holstein aus Altona.
Paul Gerhard Heims aus Kopenhagen.
Peter Matth. Joh. Friedr. Greve aus Altona.
Ernst August Heinr. Middelstein aus Hamburg.
Adolf Joh. Heinr. Witt aus Altona.
Hermann Barthold Nicol. Thau aus Altona.
Ernst Friedr. Wilh. von Bastian aus Rostock.
Nanning Ehrenfried Schwenn aus Hamburg.
Friedrich August Graack aus Eckernförde.
Hugo Karl Emil Fehncke aus Ottensen.
Johann Martin Traugott Rudolf Erichsen aus Altona.

Sexta.

Karl Alexander Alexis Peters aus Petersburg.
Wilhelm Karl Alexander Flashoff aus Altona.
Ludwig Bünsow aus Kiel.
Johannes Wilhelm Rudolph Stehr aus Altona.
Friedrich Wilhelm Jenssen aus Havetoft.
Karl George Bröcker aus Altona.
Carl Matthias Wilhelm Severin aus Altona.
Alexander Christian Wilh. Adolph Bülle aus Lauenburg.
Otto Delfs aus Ottensen.
Christian Wilhelm Marcus Breier aus Altona.
Edmund Julius Joh. Eyring aus Neumünster.
Georg Adolph Dose aus Altona.
Henri Eduard Dose " "
Gustav Friedrich Joh. Becher aus Rendsburg.
Ernst Heinrich Christian Flohr aus Kiel.
Franz Rudolph Olshausen aus Moorburg.
Johann Ludwig Leonhard Rode aus Hamburg.
Otto Hermann Erichsen aus Glückstadt.
Robert Wilhelm Ludwig Behnne aus Altona.
Hugo Louis Friedrich Schlotfeldt aus Neumünster.
Olde Edmund Clement aus Hamburg.
Heinrich Christian Witt aus Altona.
Karl Christian Brackenhöft aus Flensburg.
Johannes Heinrich Saul aus Altona.
Ising Lewie aus Altona.
Christian Friedr. Heinr. Koopmann aus Altona.
Albrecht Wilhelm Ferd. Jahn aus Hamburg.
Johann Karl Lebrecht Zeska aus Schleswig.
Friedrich Theodor Zeska " "

Septima.

Martin Joh. Gustav Wilhelm Plumeyer aus Altona.
Rickmer Peter Cäsar Krohn aus Altona.
Eggert Nicolaus Krohn " "
Johannes Caspar Heinr. Gerdau aus Altona.
Heymann Lewie aus Altona.
Fritz Friedrich von Bastian aus Rostock.
Carl Heinrich Tycho Busch aus Wedel.
Ernst Adelbert Hansen aus Rabenkirchen.
Otto Wilhelm Scharenberg aus Kiel.
Rudolph Sauerberg aus Altona.

Die Ordnung der an den beiden Tagen in der Aula vorzunehmenden Acte wird folgende sein:

am Donnerstage

um 9 Uhr zur Eröffnung Choralgesang unter Leitung des Herrn Cantors **Petersen**.

$9\frac{1}{4}$—$9\frac{3}{4}$ Uhr Prima. Horaz, Herr Dr. **Henrichsen**.
$9\frac{3}{4}$—$10\frac{1}{4}$ " Secunda. Französisch, Herr **Demory**.
$10\frac{3}{4}$—11 " Tertia. Homer, Herr Dr. **Siefert**. Dänisch, Herr **Lange**.
11 —$11\frac{1}{2}$ " Quarta. Griechisch, Herr Dr. **Hennings**.
$11\frac{1}{2}$—12 " Quinta. Naturgeschichte, Herr Dr. **Scharenberg**.
12 —$12\frac{1}{2}$ " Sexta. Lateinisch, Herr **Lange**.
$12\frac{1}{2}$—1 " Septima. Biblische Geschichte, Herr **Lange**.

Am Freitage um 11 Uhr:

Gesangvortrag: Motette von Kücken.

Der Abiturient **Ehlers** wird in Lateinischer Sprache über Lessings Character und Verdienste um Wissenschaft und Kunst reden.

Der Secundaner **Aldenhoven**: Die Klage der Ceres, von Schiller.

Deutsche Rede des Abiturienten **Chemnitz** über Schillers Verse: Von des Lebens Gütern allen
Ist der Ruhm das höchste doch.

Der Tertianer **Peters**: Der Riese von Marbach, von Schwab.

Gesangvortrag: Die Ehre Gottes aus der Natur. Melodie von Beethoven.
An die Tonkunst. Lied im Volkstone, componirt von **J. Petersen**.

Der Quartaner **von Beck**: Der Recrut auf Philippsburg, von Simrock.

Der Abiturient **Tamsen** wird Lateinisch über den Satz: Non scholae, sed vitae discendum est
reden.

Der Quintaner **Fehncke**: Schälke muß man mit Schälken fangen, von Langbein.

Der Abiturient **Schmidt** wird in Deutscher Rede den von Einigen über Schillers Jungfrau von
Orleans ausgesprochenen Tadel zu widerlegen suchen.

Der Septaner **Bröcker**: Von des Kaisers Bart, von Geibel.

Gesangvortrag: Motette von Hauptmann.

Der Unterrichtscursus des Sommersemesters beginnt am 3. Mai; Anmeldungen von Schülern nehme ich in der Woche nach Palmarum entgegen.

Lucht.

Buch- und Steindruckerei von Hammerich u. Lesser.